Algebren der Ambiguität

Christian Wurm (Düsseldorf)

Düsseldorf, 23.4.24

Ambige Algebren

Unser erstes Modell um mit Ambiguität zu räsonnieren sind ambige Algebren.

Ambige Algebren

Eine AMBIGE ALGEBRA ist eine Algebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \sim, \|, 0, 1)$, wobei $(A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra ist, $\|$ eine binäre Operation, die folgende Axiome erfüllt:

$$\sim (a\|b) = \sim a\| \sim b \qquad (\|1)$$

$$a \wedge (b\|c) = (a \wedge b)\|(a \wedge c) \qquad (\|2)$$

$$\text{Mindestens eines der beiden:} \quad a \leq a\|b \quad \text{oder} \quad b \leq a\|b \quad \text{gilt} \qquad (\|3)$$

Ambige Algebren: ein besonderes Axiom

Mindestens eines der beiden: $a \leq a \| b$ oder $b \leq a \| b$ gilt $(\|3)$

$(\|3)$ ist eine **Disjunction**!

- Das bedeutet insbesondere es gibt keine *freie ambige Algebra*, ein zentraler Begriff der universellen Algebra.
- Anders gesagt: in *jeder* ambigen Algebra gelten Gleichungen, die nicht in jeder ambigen Algebra gelten. (Das modelliert einen epistemischen Aspekt)
- Das führt uns später zu UDA –

AA: Ein Beispiel

Nimm die offensichtliche Boolesche Algebra über $\{0, a, b, 1\}$. Wir setzen

$$\begin{array}{llll} a\|b = a; & b\|a = b; & 0\|a = 0; & 1\|a = 1; \\ a\|1 = a; & b\|1 = b; & 0\|b = 0; & 1\|b = 1; \\ a\|0 = a; & b\|0 = b; & 0\|1 = 0; & 1\|0 = 1; \end{array}$$

$\wedge$-distribution gilt:

$$a = a\|b = (a\|b) \wedge a = a\|0 = a$$

$$0 = 0\|1 = (0\|1) \wedge a = 0\|a = 0$$

dasselbe für $\vee, \sim$

Das ist also eine echte 4-elementige Algebra.

Strukturtheorie I: Uniformität

Keine Kommutativität für $\|$:

Nimm an	$a\| \sim a = a$
dann	$\sim a\|a = a$
aber auch	$\sim (\sim a\|a) =\sim\sim a\| \sim a = a\| \sim a = a$
deswege	$\sim a = a$ (which only holds in 1-element algebras)

Korollar 2

Falls $\mathbf{A}$ eine AA ist, und für alle $a, b \in A$ gilt dass $a\|b = b\|a$, dann hat A höchstens ein Element.

Lemma

Für alle ambigen Algebren $\mathbf{A}$, $a, b \in A$ gilt

1. $a\|a = a$
2. $a \wedge b \leq a\|b \leq a \vee b$

Strukturtheorie I: Uniformität

Lemma (Montonizität von $\|$)

Nimm an $a' \leq a$ und $b' \leq b$. Dann $a' \| b' \leq a \| b$.

Lemma 7 (Uniformität)

Sei **A** eine ambige Algebra, $a, b \in A$, so dass $a \neq b$.

1. Falls $a \| b = a$, dann gilt für alle $c, c' \in A$: $c \| c' = c$;
2. Falls $a \| b = b$, dann gilt für alle $c, c' \in A$: $c \| c' = c'$.

Korollar

Für **A** eine ambige Algebra gilt folgendes: für alle $a, b \in A$, haben wir $a \| b = a$, oder für alle $a, b \in A$ haben wir $a \| b = b$.

Sprich: Ambige Algebren sind entweder RECHTSSEITIG oder LINKSSEITIG.

Bedeutung der Uniformität

Was bedeutet Uniformität? Das die Funktion $\|$ auf Basis *eines* Wertes global festgelegt ist!

Lemma 7 (Uniformität, informell)

Ambige Algebren sind **entweder** linksseitig **oder** rechtsseitig.

Also: $a\|b = a$ **oder** $a\|b = b$ für alle a, b

Beispiel: `Bank` bedeutet 'Sitzgelegenheit', **deswegen** bedeutet `Maus` 'Computerwerkzeug'.

Bedeutung der Uniformität

Das ist sehr unintuitiv, und scheint die Konsequenz zweier Dinge zu sein:

1. die starken Axiome von Booleschen Algebren (doppelte Negation!)
2. die seltsamen Axiome zu $\|$
3. Vermutung: auch die Tatsache dass $\|$ total ist scheint problematisch? Wir brauchen Objekte wie $a\| \sim a$ im Beweis.

Partielle Algebren?

Sei $\|$ ein partieller Operator.

- Das ist konzeptuell sehr plausibel: Ambiguität ist nicht produktiv!
- Formal bringt das aber nicht sonderlich viel (später mehr dazu).

Universelle Distributionsalgebren

UDA sind schwächer als AA:

Universelle Distributionsalgebren

Eine UDA ist eine Algebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \sim, \|, 0, 1)$, wobei $(A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra ist, $\|$ eine binäre Operation, die folgende Axiome erfüllt:

$$\sim (a\|b) = \sim a\| \sim b \tag{$\|1$}$$

$$a \wedge (b\|c) = (a \wedge b)\|(a \wedge c) \tag{$\|2$}$$

$$(a\|b)\|c = a\|(b\|c) \tag{$\|\mathrm{ass}$}$$

$$a \wedge b \leq a\|b \leq a \vee b \tag{$\|4$}$$

$$(a\|b \leq (a \vee c)\|(b \vee d)) \text{ ableitbar} \tag{$\|5$}$$

Universelle Distributionsalgebren

$$\sim (a \| b) = \sim a \| \sim b \tag{$\|$1}$$

$$a \wedge (b \| c) = (a \wedge b) \| (a \wedge c) \tag{$\|$2}$$

$$(a \| b) \| c = a \| (b \| c) \tag{$\|$ass}$$

$$a \wedge b \leq a \| b \leq a \vee b \tag{$\|$4}$$

Das problematische Axiom 3 zerfällt in zwei Teile:

- 4 regelt die Ordnung zwischen ambigen Objekten (Monotonizität)
- ass regelt Assoziativität
- Distribution bleibt gleich!

Universelle Distributionsalgebren

Lemma

Die Klasse UDA ist eine algebraische Varietät (geschlossen unter HSP!).

Eine Varietät wird axiomatisiert von einer Menge von Gleichungen (algebraische Theorie).

Lemma

Jede ambige Algebra ist eine universelle Distributionsalgebra.

Universelle Distributionsalgebren

Lemma

Die Klasse UDA ist eine algebraische Varietät (geschlossen unter HSP!).

Eine Varietät wird axiomatisiert von einer Menge von Gleichungen (algebraische Theorie).

Lemma

Jede ambige Algebra ist eine universelle Distributionsalgebra.

Universelle Distributionsalgebren

Randlemma

Sei **U** eine UDA, $a, b, c \in U$. Dann gilt: $a \| b \| c = a \| c$.

Sprich: jede Ambiguität jenseits der zwei ist bedeutungslos in dieser Klasse!

Repräsentationstheorem für UDA

Jede universelle Distributionsalgebra ist isomorph zu einer Algebra $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, wobei gilt:

- $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ Boolesche Algebren sind,
- $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ ist das direkte Produkt der beiden,
- $(a, b) \| (c, d) = (a, d)$ für alle $a, c \in B_1$, $b, d \in B_2$

Universelle Distributionsalgebren

Korollar

Sei **U** eine UDA, $a, b \in U$. Falls $a \| b = b \| a$, dann gilt $b = a$.

Korollar

Nimm an, **U** ist eine kommutative UDA. Dann ist $|U| = 1$, sprich: die Algebra ist trivial.

Ist ja ein Ding! Noch eine interessante Beobachtung:

Freie ambige Algebra

Jede freie ambige Algebra ist eine universelle Distributionsalgebra.

Was bedeutet das?

UDA sind kein passendes Modell für Räsonieren mit Ambiguität. Aber:

- Schwächere Axiome sind nicht zu halten.
- Partialität hilft nicht weiter.

Einziger Ausweg: **Algebra selbst** ist das Problem! Insbesondere zwei Eigenschaften:

1. Kongruenz (Transitivität als Spezialfall)
2. Abschluss unter Substitution

Was bedeutet das?

Kongruenz

Kongruenz bedeutet: wir können äquivalente Terme in allen Kontexten ersetzen – das Ergebnis bleibt gleich.

Substitution

Substitution bedeutet: wir können wahre Atome in wahren (Un)Gleichungen beliebig, aber uniform substituieren, das Ergebnis ist eine wahre (Un)Gleichung

Das bedeutet: Räsonnieren mit Ambiguität ist entweder inkongruent oder insubstituibel (nicht abgeschlossen unter Substitution).

Der Fundamentalsatz zur Ambiguität

Hier gibt es verschiedene Versionen, die erste algebraisch:

Theorem

Sei $\mathbf{A} = (A; \wedge, \vee, \sim, 0, 1, \|)$ *eine Algebra wobei*

- $(A; \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ *eine Boolesche Algebra ist*
- $\|$ *erfüllt die Gesetze von*
  1. *Universeller Distribution*
  2. *Unambigen Implikationen*
  3. $\|$*-Assoziativität*

Dann gilt: f.a. $a, b, c \in A$ $a\|c\|b = a\|b$

Corollary

Nimm an $\mathbf{A}$ *ist zusätzlich Kommutativ, also* $a\|b = b\|a$*. Dann ist* $\mathbf{A}$ *trivial, hat also nur ein Element.*

Der Fundamentalsatz zur Ambiguität

Das bedeutet also folgendes

Bedeutung des Fundamentalsatzes

Jede Algebra, welche die grundlegendesten Eigenschaften von Ambiguität erfüllt, hat Eigenschaften, welche stark kontraintuitiv sind.

Konsequenz

Algebra selber ist ungeeignet, Inferenzen mit Ambiguität zu erfassen. Das liegt an zwei **intrinsischen Eigenschaften aller Algebras**:

1. **Äquivelente sind austauschbar**, Wahrheit wird präserviert.
2. **Atome können uniform substituiert werden**, Wahrheit wird präserviert.

Der Fundamentalsatz zur Ambiguität

Konsequenz

Algebra selber ist ungeeignet, Inferenzen mit Ambiguität zu erfassen. Das liegt an zwei **intrinsischen Eigenschaften aller Algebras**:

1. Nimm an $t_1[t] = t_2$, $t = t'$ ist valide in einer (Klasse von) Algebra. Dann gilt auch $t_1[t'] = t_2$.
2. Nimm an $t_1 = t_2$ ist valide in einer (Klasse von) Algebra, σ eine Abbildung von Atomen zu beliebigen Termen. Dann gilt auch $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$.

Eigenschaft 1 bedeutet: gleiche Terme können in allen Kontexten substituiert werden, Wahrheit von Gleichungen bleibt unverändert. Nennen wir das **e-substitution**.

Eigenschaft 2 bedeutet: Atome können uniform substituiert werden

Arithmetik: ein Beispiel

e-subsitution:

$$\begin{aligned} (4+5)\cdot 3 &= 27 \\ 2+3 &= 5 \\ \therefore (4+(2+3))\cdot 3 &= 27 \end{aligned}$$

u-substitution:

$$\begin{aligned} (x+y)\cdot z &= x\cdot z + y\cdot z \\ x &\mapsto z+x \\ \therefore ((z+x)+y)\cdot z &= (z+x)\cdot z + y\cdot z \end{aligned}$$

Der Fundamentalsatz, logische Version

Theorem

Sei $\mathcal{L} = (Form, \vdash)$ eine Logik der Ambiguität welche

- *klassische Logik konservativ erweitert*
- *die Gesetze erfüllt*
  1. *universelle Distribution*
  2. *unambige Inferenzen*
  3. *$\|$-Assoziativität*

Nimm weiterhin an, $\mathfrak{L}$ hat die Regel (Schnitt) (ist also transitiv) und ist geschlossen unter uniformer Substitution. Dann gilt für alle α, β, γ: in $\mathfrak{L}$ gilt

$$\alpha\|\gamma\|\beta \dashv\vdash \alpha\|\beta$$

Corollary

Nimm an $\mathfrak{L}$ erfüllt zusätzlich $\alpha\|\beta \vdash \beta\|\alpha$. Dann ist $\mathfrak{L}$ ist inkonsistent, d.h.

Fundamentalsatz, Konsequenz

Logische Konsequenz des FS für die Logik

Es gibt 4 Arten von Logiken der Ambiguität

1. geschlossen unter e-substiution und u-substitution: trivial
2. nicht geschlossen weder unter e- noch u-substitution: uninteressant? (warum sollte man das wollen?)
3. geschlossen unter e-substitution, nicht u-substitution: **misstrauische Logik**.
4. geschlossen unter u-substitution, nicht e-substitution: **vetrauensvollle Logik**.

Wir werden 3. und 4. betrachten.

Distrustful logics

3. geschlossen unter e-substitution, nicht u-substitution: **misstrauische Logik**.

Warum sind diese Logiken misstrauisch? Die Intuition ist

Intuition misstrauischer Logik

Wenn man wissen will, ob ein Argument gilt, muss man alle involvierten Propositionen atomar prüfen. Man kann nicht dem Schema vertrauen!

For example:

$$\begin{array}{ll} \vdash & p \vee \neg p \\ \nvdash & (p \| q) \vee \neg (p \| q) \end{array}$$

Misstrauische Logik

Intuition misstrauischer Logik

Wenn man wissen will, ob ein Argument gilt, muss man alle involvierten Propositionen atomar prüfen. Man kann nicht dem Schema vertrauen!

$$
\begin{array}{rc}
 & \text{Peter loves plants} \\
 & \text{If someone loves plants, he loves animals} \\
\therefore & \text{Peter loves animals}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rc}
 & \alpha \\
 & \alpha \to \beta \\
\therefore & \beta
\end{array}
$$

Gilt das? Hängt davon ab!

Vetrauensvolle Logik

4. geschlossen unter u-substitution, nicht e-substitution: **vertrauensvolle Logik**.

Was hat das mit Vertrauen zu tun? Die Intuition ist:

Intuition der Logik des Vetrauens

Alle Inferenzen sind valide als Schemata, unabhängig vom konkreten Inhalt

NB: nicht-trivial vertrauensvolle Logiken können *niemals* unter e-substitution geschlossen sein (Fundamentalsatz)! Wie ergibt das konzeptuell Sinn?

Trustful logics

NB: nicht-trivial vertrauensvolle Logiken können *niemals* unter e-substitution geschlossen sein (Fundamentalsatz)! Wie ergibt das konzeptuell Sinn?

Die Antwort liegt genau darin, dass wir im Vertrauen soz. zuviele Argumente akzeptieren, um transitiv sein zu können:

(1) `Eis ist Wassser (in gefronener Form)`

(2) `Wasser ist flüssig.`

(3) `Eis ist flüssig.`

Um keine falschen Schlüsse zu ziehen, dürfen wir verschiedene Inferenzen nicht zusammenwerfen, denn die uniforme Verwendung kann nicht global garantiert werden!

Trustful logics

NB: nicht-trivial vertrauensvolle Logiken können *niemals* unter e-substitution geschlossen sein (Fundamentalsatz)! Wie ergibt das konzeptuell Sinn?

Man beachte auch das folgende Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} (p\|q) \vee \neg(p\|q) & \equiv & (p \vee \neg p)\|(p \vee \neg q)\|(\neg p \vee q)\|(q \vee \neg q) \\ & \not\equiv & \color{red}{(r \vee \neg r)}\|(p \vee \neg q)\|(\neg p \vee q)\|(q \vee \neg q) \end{array}$$

Hier ist $p \vee \neg p$ kein *beliebiges* Theorem – die Variable p ist an die anderen Okkurenzen gebunden.

Intensionale Kontexte: Natürliche Sprache ist nicht geschlossen unter e-substitution

Propositionale Einstellungen

- Sie glaubt dass P
- Sie denkt dass P
- Sie sagt dass P

(4)
a. In PA ist $2 + 2 = 4$
b. In PA ist $2 + 2 = 5$
c. In PA ist Fermats letzter Satz wahr.

Nachdem der Satz wahr ist (kürzlich bewiesen)

(4-c) ist äquivalent zu (4-b).

Intensionale Kontexte: Natürliche Sprache ist nicht geschlossen unter e-substitution

Aber: die Aussagen sind offensichtlich nicht austauschbar

(5) a. Er glaubt dass in PA $2 + 2 = 5$
b. Er glaubt dass in PA Fermats letzter Satz falsch ist.

Dagegen: (6) ist austauschbar mit (4-b):

(6) Er glaubt dass in PA $2 + 2$ eins mehr als 4 ist.

- Logische Äquivalenz bedeutet nicht Austauschbarkeit in allen Kontexten
- Manche äquivalenten Aussagen sind austauschbar, andere nicht!