Der volle Lambek Kalkül FL

Kilian Evang, Christian Wurm

Düsseldorf, 20.10.2022

Zur Erinnerung

Wir haben gesehen dass der Lambek-Kalkül zwar interessant sein mag, aber linguistisch betrachtet eben nicht:

1. Er ist prohibitiv komplex (NP)
2. und nicht mächtiger als CFG

Er hat aber tatsächlich andere Anwendungen! Wir betrachten kurz was bisher geschah:

Der AB-Kalkül

(ax) $\alpha \vdash \alpha$

$(\mathbf{I} - /)$ $$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \beta/\alpha}$$

$(\mathbf{I} - \backslash)$ $$\frac{\alpha, \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha\backslash\beta}$$

$(/ - \mathbf{I})$ $$\frac{\Delta, \beta, \Theta \vdash \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Delta, \beta/\alpha, \Gamma, \Theta \vdash \gamma}$$

$(\backslash - \mathbf{I})$ $$\frac{\Delta, \beta, \Theta \vdash \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Delta, \Gamma, \alpha\backslash\beta, \Theta \vdash \gamma}$$

(schnitt) $$\frac{\Gamma, \alpha, \Gamma' \vdash \beta \quad \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, \Delta, \Gamma' \vdash \beta}$$

Lambek

Der Lambek-Kalkül hat einen weiteren Konnektor $\bullet$:

- Falls $\alpha, \beta \in \mathit{Var}$, dann $\alpha \bullet \beta \in \mathit{Var}$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \bullet \beta, \Delta \vdash \gamma} \bullet\mathbf{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \bullet \beta} \mathbf{I}\bullet$$

Wir möchten jetzt unseren Blick etwas weiten, und *L* nicht mehr als potenzielle Grammatik betrachten, sondern als **Logik**.

Lambek als Logik

Wofür ist diese Logik gut? Folgendes gilt es zu beachten:

Ressourcen

L ist eine Logik der **Ressourcen**:

- Wenns regnet ist die Straße nass, aber davon hört der Regen nicht auf.
- Wenn ich 1euro 50 hab, kann ich mir ein Mürbchen kaufen, aber die 1euro 50 sind dann weg (Inflation)!

Inferenzen in *L* sind immer *ressourcen-sensitiv*:

- α ist etwas anderes als α, α
- 1euro 50 sind ja auch was anderes als 3euro!

Lambek als Logik

Wofür ist diese Logik gut? Folgendes gibt es auch zu beachten:

Reihenfolge

L ist eine Logik der **Sequenzen**:

- Sei $\alpha :=$ '*n* ist eine gerade Zahl', $\beta :=$ '*n* ist größer als 2'. Dann ist $\alpha, \beta = \beta, \alpha$.
- Sei $\alpha :=$'Ich ziehe mir Socken an', $\beta :=$'Ich ziehe mir Schuhe an'. Dann ist $\alpha, \beta \neq \beta, \alpha$.

Inferenzen in *L* sind immer sensitiv für Reihenfolge. Ein natürliches Beispiel sind Handlungen!

Handlungslogik

Interetieren wir Atome $p \in \mathit{Var}$ als Handlung. Dann gilt:

- $\alpha \bullet \beta$ ist die **Verkettung** der Handlungen: erst α, dann β.
- α/β ist die minimale Handlung, so dass die Verkettung mit β in α resultiert. Anders: tun das mindeste, damit noch β fehlt um α zu haben.
- $\beta\backslash\alpha$ ist die minimale Handlung, die β zu α vervollstňdigt. Anders: $\beta\backslash\alpha$ bedeutet: wir erreichen α unter Voraussetzung β.

Auf diese Art kann man eine Reihe interessanter Dinge beweisen:

Handlungslogik

Wenn wir α, β als Handlung interpretieren, dann gilt:

$$\alpha \vdash \beta \text{ bedeutet: } \alpha \text{ subsumiert (als Handlung) } \beta$$

Also, für meine minimalen/maximalen Elemente $\bot$ und $\top$:

- Wenn ich $\bot$ mache, dann habe ich *jede* Handlung getan. Also soz. die unmögliche Handlung.
- Wenn ich eine beliebige Handlung mache, dann mache ich $\top$. Diese Handlung mache ich soz. *immer*, egal was ich mache.
- $\top$ darf nicht verwechselt werden mit 1, der neutralen Handlung (für Verkettung): soz. Nichtstun. Auch wer nichts tut, tut etwas!

Handlungslogik: Übung

Was bedeuten folgende Sequenten:

1. $1/\alpha$
2. $\alpha/1$
3. $\alpha \backslash \perp$

Beweisen Sie folgende Sequenten: (Stimmen die?)

1. $p \bullet (q/r) \vdash (p \bullet q)/r$
2. $p/(q \bullet r) \vdash (p/r)/q$
3. $(p \bullet q)\backslash(q \bullet p) \vdash q\backslash(p\backslash(q \bullet p))$
4. $q\backslash(p\backslash r) \vdash (p \bullet q)\backslash r$

Handlungslogik

Wo wir von Handlungen sprechen: es macht nun Sinn, zwei weitere Konnektoren einzuführen:

- $\wedge$, den klassischen Schnitt: $\alpha \wedge \beta$ ist die mindeste Handlung, welche α, β impliziert/subsumiert.
- $\vee$, den klassischen Vereinigt: $\alpha \vee \beta$ ist die stärkste Handlung, welche sowohl von α als auch von β impliziert/subsumiert wird.

Vorsicht hier: es handelt sich erstmal nicht um klassisches 'und' und 'oder': es ist besser diese Konnektoren als kleinste obere Schranke ($\vee$) und größte untere Schranke ($\wedge$) aufzufassen.

Handlungslogik: $\wedge, \vee$

$$(\vee \mathbf{I}) \quad \frac{\Gamma, \alpha, \Delta \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta, \Delta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \vdash \gamma}$$

$$(\mathbf{I} \vee 1) \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad (\mathbf{I} \vee 2) \quad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$$

$$(\wedge \mathbf{I}1) \quad \frac{\Gamma, \alpha, \Delta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \vdash \gamma} \qquad (\wedge \mathbf{I}2) \quad \frac{\Gamma, \beta, \Delta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \vdash \gamma}$$

$$(\mathbf{I} - \wedge) \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$$

Handlungslogik: 1 und $\perp$

$(\perp \mathbf{l})$ $\Gamma, \perp \Delta \vdash \alpha$ $(\mathbf{l}\top)$ $\Gamma \vdash \top$

$(1\mathbf{l})$ $\dfrac{\Gamma, \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, 1, \Delta \vdash \alpha}$ $(\mathbf{l}1)$ $\vdash 1$

Das gibt uns den vollen Lambek-Kalkül **FL**.

Der volle Lambek Kalkül **FL**: Übung

Beweisen Sie folgende Sequenten:

1. $p \bullet (q \vee r) \vdash (p \bullet q) \vee (p \bullet r)$
2. $(p \bullet q) \vee (p \bullet r) \vdash p \bullet (q \vee r)$
3. $(p \wedge q) \bullet r \vdash (p \bullet r) \wedge (q \bullet r)$ (die Gegenrichtung gilt nicht!)
4. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$ (die Gegenrichtung gilt nicht!)

Wir haben also nur bedingte Distributivgesetze, insbesondere eine Asymmetrie von $\wedge, \vee$. Grund hierfür ist dass rechts von $\vdash$ nur **Formeln** stehen können, links aber **Sequenzen**.

Der volle Lambek Kalkül **FL** – Semantik 1

Das ist (fast) der volle Lambek Kalkül, die

Mutter aller Logiken (dazu später mehr)

Welche formale Semantik können wir um geben?

Der volle Lambek Kalkül **FL** – Semantik 1

Die erst und einfachste (für den Entwickler) Semantik ist immer algebraisch. Eine residuierter Monoid ist eine Struktur

$$(M, \cdot, /, \backslash, \leq),$$

wobei $(M, \cdot, 1)$ ein Monoid ist (assoziativ), $(M, \leq)$ eine partielle Ordnung, und

$$b \leq a \backslash c \iff a \cdot b \leq c \iff a \leq c/b \qquad \text{(Res)}$$

gilt, das **Gesetz des Residuums**.

Der volle Lambek Kalkül **FL** – Semantik 1

Beispiele für residuierte Monoide:

- $(\mathbb{Z}, +, 0)$
- $(\mathbb{Q}, \cdot, 1)$, aber auch $(\mathbb{Z}, \cdot, 1)$

Die sind aber sehr speziell, z.B. kommutativ. Etwas allgemeiner sind folgende Strukturen:

- $(F, \circ, id)$, wobei F die Menge der linearen Funktionen $f(x) = ax + b$ ist mit $a \neq 0$. Dann ist $f \circ g(x) = f(g(x))$ (die Verkettung) linear, $f \leq g$ falls f.a. $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \leq g(x)$.

Dieser Monoid ist nicht kommutativ!

Der volle Lambek Kalkül **FL** – Semantik 1

Wie sind die Residuen definiert?

$$f/g(x) = y \;\Leftrightarrow\; \exists z.g(z) = x \& f(z) = y \tag{1}$$

Da alle $f \in F$ bijektiv sind, ist das eindeutig, gibt es f^{-1}:

$$f(x) = ax + b \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \tag{2}$$

Dann haben wir $f^{-1}(f(x)) = x$, und wir bekommen

$$f/g \quad = \quad f \circ g^{-1} \tag{3}$$
$$g\backslash f \quad = \quad g^{-1} \circ f \tag{4}$$

Das basiert also darauf, dass die Funktionen inverse Elemente haben, also:

Lemma

Jede Gruppe ist ein residuierter Monoid.

Der volle Lambek Kalkül **FL** – Semantik 2

Die Semantiken bisher sind speziell und erfüllen viele Eigenschaften, welche nicht ableitbar sind (Gruppen). Folgende Semantiken sind "allgemeiner", und lassen sich auch erweitern für $\wedge, \vee$

- $(\wp(\Sigma^*), \cdot, \{\epsilon\}, /, \backslash, \leq)$ (Sprachsemantik)
- $(\wp(M \times M), \circ, id, /, \backslash, \leq)$ (Relationensemantik)

Diese beiden Semantiken sind besonders, weil sie beide **mengentheoretisch** sind; nur die Operation $\bullet$ wird speziell interpretiert.

Der volle Lambek Kalkül **FL** – Semantik 2

Gleichzeitig sind beides formale Entsprechungen der "Handlungssemantik":

- Im einen Sinne sind Handlungen sichtbar, sie hinterlassen "Spuren". Das wäre die Sprachsemantik
- Im anderen Sinne sind Handlungen ausschließlich durch ihre Ergebnisse bestimmt. Das wäre die Relationensemantik.

Die Frage nach der Vollständigkeit

Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Modellen, z.B. alle Modelle der Form $(\wp(\Sigma^*), \cdot, /, \backslash, \cup, \cap)$.
Wir interpretieren jede Formel in einem entsprechenden Modell; die Interpretation nennen wir σ.

Korrektheit

Eine Semantik $\mathcal{C}$ ist **korrekt** für eine Logik $\mathfrak{L}$, falls gilt: für beliebige Formeln α, β, beliebige Interpretationen σ gilt:

$$\text{Falls } \alpha \vdash \beta, \text{ dann } \sigma(\alpha) \leq \sigma(\beta)$$

Das bedeutet: unsere Inferenzen sind valide in jeder Algebra in $\mathcal{C}$: was ableitbar ist, ist wahr.

Die Frage nach der Vollständigkeit

Vollständigkeit

Eine Semantik $\mathcal{C}$ ist **Vollständig** für eine Logik $\mathfrak{L}$, falls gilt: falls für alle Formeln α, β, und alle Interpretationen σ gilt:

$$\sigma(\alpha) \leq \sigma(\beta), \text{ dann gilt auch } \alpha \vdash \beta, \text{ dann}$$

Das bedeutet: was wahr ist, ist auch ableitbar – unsere Logik erfasst die gesamte Wahrheit.

(Un)Vollständigkeit

Folgende Ergebnisse sind nicht ganz trivial:

Theorem

1. Die Logik L ist vollständig für Sprachmodelle, Relationenmodelle
2. Die Logik $L1$ ist vollständig für Sprachmodelle, Relationenmodelle
3. Die Logik $L1(\wedge, \vee)$ ist unvollständig für Sprach- und Relationenmodelle ($\wedge$-$\vee$-Distribution!)

Hier ergibt sich die Frage: gibt es eine interessante sprachtheoretische Semantik für $L1(\wedge, \vee)$? Ein schönes Beispiel ist folgendes:

Formale Begriffsanalyse

Formale Begriffsanalyse

Formale Begriffsanalyse (FBA) basiert auf sog. **Kontexten** (G, M, I), wobei G (Gegenstände) und M (Merkmale) Mengen sind, und $I \subseteq G \times M$.

- G ist die Menge der Gegenstände, die sog. Extension
- M ist die Menge der Merkmale,
- $I \subseteq G \times M$ ist die Intensionsrelation, die bestimmt welche Gegenstände haben welche Merkmale:

$(g, m) \in I$ bedeutet: Objekt g hat Merkmal m.

Formale Begriffsanalyse

Damit definiert man die **polaren Abbildungen**

$$[-]^{\triangleright} : \wp(G) \to \wp(M)$$
$$[-]^{\triangleleft} :\to \wp(M) \to (G)$$

wobei für $S \subseteq G$, $C \subseteq M$ gilt:

- $S^{\triangleright} := \{m : \forall g \in S, (g,m) \in I\}$;
- $C^{\triangleleft} := \{g : \forall m \in C, (g,m) \in I\}$.

Paare der Form (S, C), wobei $S = C^{\triangleleft}$, $C = S^{\triangleright}$, nennt man **formale Begriffe**.

Galois-Verbindung

Wir haben hier eine **Galois-Verbindung**: $S \subseteq S'$ gdw. $S^{\triangleright} \supseteq S'^{\triangleright}$, $C \subseteq C'$ gdw. $C^{\triangleleft} \supseteq C'^{\triangleleft}$.
Mengen der Form $S^{\triangleright\triangleleft}$, $C^{\triangleleft\triangleright}$ nennt man geschlossen.

Das erlaubt uns die sog. Galois-Theorie zu applizieren, und vieles folgt ohne weiteres daraus:

Formale Begriffsanalyse

Wir haben für $S, S' \subseteq G$

1. $S \subseteq S^{\triangleright\triangleleft}$
2. $S \subseteq S'$ impliziert $S^{\triangleright\triangleleft} \subseteq S'^{\triangleright\triangleleft}$
3. $S \subseteq S'$ impliziert $S^{\triangleright} \supseteq S'^{\triangleright}$
4. $S^{\triangleright} = S^{\triangleright\triangleleft\triangleright}$: Mengen der Form $S^{\triangleright}$sind immer geschlossen!

Dual gilt dasselbe für $C \subseteq M$. Also ist $[-]^{\triangleright\triangleleft}$ ein Hüllenoperator.

Syntaktiche Begriffe

Wir machen nun folgendes: setze

$$\begin{aligned} G &= \Sigma^* \\ M &= \Sigma^* \times \Sigma^* \end{aligned}$$

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann bekommen wir

$$(w, (a, b)) \in I_L \text{ gdw. } awb \in L$$

(see [**?**]). Wir bekommen zwei **polare Abbildungen**

$$[-]^{\triangleright} : \wp(\Sigma^*) \to \wp(\Sigma^* \times \Sigma^*) \tag{5}$$

$$[-]^{\triangleleft} : \to \wp(\Sigma^* \times \Sigma^*) \to (\Sigma^*) \tag{6}$$

Syntaktische Begriffe

Es gilt für $S \subseteq \Sigma^*$, $C \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$,

- $S^{\triangleright} := \{(a, b) : \forall w \in S,\ awb \in L\}$;
- $C^{\triangleleft} := \{w : \forall (a, b) \in C, awb \in L\}$.

Syntaktische Begriffe

$[-]^{\triangleright\triangleleft}$ ist ein Hüllenoperator auf Mengen von Worten; eine Menge $S \subseteq \Sigma^*$ ist geschlossen falls $S = S^{\triangleright\triangleleft}$.

$[-]^{\triangleleft\triangleright}$ ist ein Hüllenoperator auf Paaren von Worten; eine Menge $C \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ist geschlossen falls $C = C^{\triangleleft\triangleright}$.

Ein **syntaktischer Begriff** ist ein Paar (S, C), wobei $S = C^{\triangleleft}$, $C = S^{\triangleright}$ (impliziert dass S, C geschlossen sind).

Für $S \subseteq \Sigma^*$, $C \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, können wir schreiben $\mathcal{C}(S)$ für $(S^{\triangleright\triangleleft}, S^{\triangleright})$ und $\mathcal{C}(C)$ für $(C^{\triangleleft}, C^{\triangleleft\triangleright})$.

Syntactic Concepts - Monoid structure

Sei $\mathfrak{B}_L$ die Menge der syntaktischen Begriff von L. Wir definieren

$$(S, C) \wedge (S', C') = (S \cap S', (C \cup C')^{\lhd\rhd}) \tag{7}$$
$$(S, C) \vee (S', C') = ((S \cup S')^{\rhd\lhd}, C \cap C') \tag{8}$$

Schnitt präserviert Geschlossenheit, Vereinigung nicht!

Nukleus und Monoid

Nukleus

Sei $(M, \cdot, 1)$ ein monoid, $\gamma : \wp(M) \to \wp(M)$ ein Hüllenoperator, wobei $\gamma(A) \cdot \gamma(B) \leq \gamma(A \cdot B)$. Dann nennen wir γ einen **Nukleus**.

Für jeden Monoid ist sein **nukleares Abbild** eine residuierte Struktur, insbesondere ein residuierter Verband:

Nukleus und Monoid

Nukleares Abbild

Das **nukleare Abbild** von $\wp(M^*)$ ist der Verband

$$(\gamma[\wp(M^*)], \circ_\gamma, \cap, \cup_\gamma, /, \backslash, \gamma(\{1\}), M^*, \gamma(\emptyset)),$$

den wir auch $\gamma(\mathbf{M})$ nennen.

Falls γ nuklear ist, dann ist $\gamma(\mathbf{M})$ ein vollständiger residuierter Verband (see [**?**]), wobei

- $X \cup_\gamma Y := \gamma(X \cup Y)$,
- $X \circ_\gamma Y := \gamma(XY)$.
- $\gamma(\mathbf{M})$ ist begrenzt durch $\gamma(\top) = B^*$ und $\gamma(\emptyset)$

Nukleus und Monoid

$\triangleright\triangleleft$ ist eine nukleare Abbildung für die punktweise Verkettung von Mengen:

$$M^{\triangleright\triangleleft} \cdot N^{\triangleright\triangleleft} \subseteq (MN)^{\triangleright\triangleleft} \tag{9}$$

Beweis:
Nimm an $x \in M^{\triangleright\triangleleft} \cdot N^{\triangleright\triangleleft} = \{wv : w \in M^{\triangleright\triangleleft}, v \in N^{\triangleright\triangleleft}\}$
Also $x = x_1x_2$, wobei $x_1 \in M^{\triangleright\triangleleft}$, $x_2 \in N^{\triangleright\triangleleft}$.
Also falls $yMNy' \in L$, dann $yx_1x_2y' \in L$.
Also $x_1x_2 \in (MN)^{\triangleright\triangleleft}$

Nukleus und Monoid

Das Gegenstück gilt übrigens nicht!

$$L = (a^+ b^+ c^+ d^+) \cup (a^+ d^*) \tag{10}$$

dann ist

$$d^* \subseteq (b^+ c^+)^{\rhd\lhd} \tag{11}$$
$$d^* \not\subseteq (b^+))^{\rhd\lhd}(c^+)^{\rhd\lhd} \tag{12}$$

und daher

$$(b^+)^{\rhd\lhd}(c^+)^{\rhd\lhd} \subsetneq (b^+ c^+)^{\rhd\lhd} \tag{13}$$

Nukleus und Monoid

Also: Hülle der Konkatenation ist mehr als Konkatenation der Hülle!

- Der Grund: in $(MN)^{\rhd\lhd}$ kann nicht jedes Wort dekomponiert werden zu $x_1 \in M$, $x_2 \in N$
- Aber $(MN)^{\rhd\lhd} = (M^{\rhd\lhd}N^{\rhd\lhd})^{\rhd\lhd}$! (die Hülle fügt keine relevante Info zu einer Menge hinzu!)

Nukleus und Monoid

Syntaktische Begriffe haben also eine Monoid-Struktur.

- für $(S_1, C_1), (S_2, C_2) \in \mathfrak{B}_L$, setze

$$(S_1, C_1) \circ (S_2, C_2) = ((S_1 S_2)^{\triangleright\triangleleft}, (S_1 S_2)^{\triangleright}).$$

Die Residua gibt es nun frei Haus:

- $A \leq C/B \Leftrightarrow A \circ B \leq C \Leftrightarrow B \leq A \backslash C$.

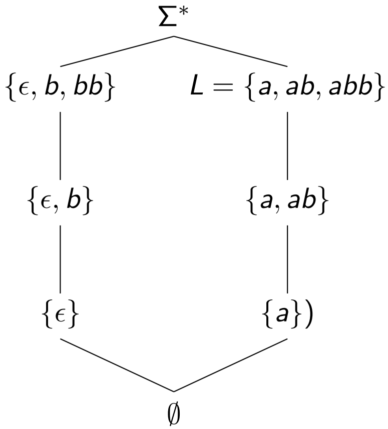
Lemma

$SCL(L) := (\mathfrak{B}_L, \vee, \wedge, \circ, /, \backslash, \mathcal{C}(\epsilon), \mathcal{C}(\Sigma^*), \mathcal{C}(\Sigma^* \times \Sigma^*))$ ist ein vollständiger, beschränkter, residuierter Verband.

Ein kleines Beispiel

Sei $L := \{a, ab, abb\}$.

$(\mathfrak{B}_L, \vee, \wedge)$ sieht so aus:



Die Bedeutung syntaktischer Begriffe

Syntaktische Begriffe sind sehr interessant aus einer linguistischen Perspektive.

Normalerweise denkt man in formalen Sprachen im Sinne von Nerode-Äquivalenzen:

$$w \sim_L v \text{ gdw. für alle } x, y \in \Sigma^*, \; xwy \in L \text{ iff } xvy \in L.$$

Das liefert eine Kongruenz über Worte: kongruente Teilworte sind austauschbar in allen Kontexten.

(Berühmtes Ergebnis: eine Sprache ist äquivalent gdw. es nur endlich viele nicht-äquivalente Worte gibt; Satz von Nerode)

Die Bedeutung syntaktischer Begriffe

Die die eher kleine Klasse englischer Auxiliare:

$$\text{AUX} = \{\text{must, can, will, have to, would}\}$$

Diese sind *nicht* äquivalent: `can` ist ein Nomen, hat also eine weitere Distribution als z.B. `must`.

(1) Give me a can of soda, please

(2) He went to the can for some years

Die Bedeutung syntaktischer Begriffe

Aber: aber die Klasse der Auxiliare ist nunmal eine reale Klasse (sagen Linguisten).

- Falls ein Verb in allen Kontexten auftaucht, in denen auch must,can, have to etc. auftauchen können, sollte es jedenfalls ein Auxiliar sein
- unabhängig davon, wo es sonst noch stehen kann!

Nimm z.B. `might`:

- `w AUX v` ist Englisch impliziert `w might v` ist Englisch.
- Also: `might` ist ein Auxiliar!

Die Bedeutung syntaktischer Begriffe

Also: Syntaktische Begriffe filtern etwas von der Unordnung natürliche Sprache aus.

- Wir können bedeutungsvolle Kategorien erstellen, die nur mit Äquivalenz nicht zu bekommen wären (wegen Ambiguität)
- Also: linguistisch wertvoll, wurde auch genutzt in Lernalgorithmen! ([**?**])
- Formal: Syntaktische Begriffe liefern beschränkte Äquivalenz im Hinblick syntactische Kontext, zumindest solche, die eine Bedeutung haben (geschlossen unter $[-]^{\lhd\rhd}$)

Distributivgesetze

Syntactische Begriffe erfüllen nicht die Distributivgesetze:

$$(A \wedge B) \vee C \lneq (A \vee C) \wedge (B \vee C) \tag{14}$$

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \lneq (A \vee B) \wedge C \tag{15}$$

Was bedeutet das sprachtheoretisch?

hier ein einfaches Beispiel:

$$L = \{xxayy, xxxbyyy, xcy\}$$

Distributivgesetze

$L = \{xxayy, xxxbyyy, xcy\}$

$(\{a\}^{\triangleright} \cap \{b\}^{\triangleright}) = \emptyset$, also $\mathcal{C}(a) \vee \mathcal{C}(b) = \top$

$(\mathcal{C}(a) \vee \mathcal{C}(b)) \wedge \mathcal{C}(c) = \mathcal{C}(c)$ (Ordnungstheorie).

Umgekehrt:
$a^{\triangleright} \cup c^{\triangleright} = \{(xx, yy), (x, y)\}$, und $\{(xx, yy), (x, y)\}^{\triangleleft} = \emptyset$.

Also $\mathcal{C}(a) \wedge \mathcal{C}(c) = \perp = \mathcal{C}(b) \wedge \mathcal{C}(c)$

Also $(\mathcal{C}(a) \wedge \mathcal{C}(c)) \vee (\mathcal{C}(b) \wedge \mathcal{C}(c)) = \perp$

Vollständigkeit von Syntaktischen Begriffen

Sei SB die Klasse der Syntaktischen Begriffsverbände $SB(L)$ for any language L.

Theorem

(Korrektheit) Falls $\Vdash_{\mathsf{FL}_\perp} \Gamma \vdash \alpha$*, dann* $SB \models \Gamma \vdash \alpha$.

Korrektheit folgt aus der Tatsache, dass SB eine Klasse von residuierten Verbänden darstellt.

Theorem

(Vollständigkeit) Falls $SCL \models \Gamma \vdash \alpha$*, dann* $\Vdash_{\mathsf{FL}_\perp} \Gamma \vdash \alpha$.

Beweisidee:
Gegeben einen residuierter Verband $\mathbf{B}$ konstruieren wir eine Sprache L_B und eine isomorphe Einbettung $h : \mathbf{B} \to SCL(L_B)$.

Vollständigkeit von Syntaktischen Begriffen

Theorem

(Vollständigkeit) If SCL $\models \Gamma \vdash \alpha$, *then* $\Vdash_{\mathsf{FL}_\perp} \Gamma \vdash \alpha$.

Proof idea:

$$L_B := \{b_1 ... b_n \underline{b} w : b_1 \cdot ... \cdot b_n w \leq_{\mathbf{B}} b,\ w \in B^*\}.$$

Also: $b \in B$ wird abgebildet auf $\mathcal{C}(b)$; das ist die Einbettung.

Vollständigkeit von Syntaktischen Begriffen

Zusammenfassung:

- $L, L1$ sind die Sprachen der Handlungen/Prozesse, mit mengentheoretischer Semantik
- **FL** hat keine mengentheoretische Semantik (Distributivgesetze!). Es ist aber die Logik syntaktischer Begriffe!
- Umgekehrt: syntaktische Begriffe verhalten sich so wie Kategoriale Logiken, und das ist das eigentlich (linguistisch) Interessante.
- Umgekehrt macht es aber auch Sinn, Handlungen als Begriffe zu denken (Relationen und Sprachen). Dann ist **FL** auch wieder die Logik der Handlungen.