

November 2, 2023

### Hausaufgabe 3

(Zum 31.10.23)

**Teil 1** Zeigen Sie, dass folgende Aussagen wahr/falsch sind:

1.  $(\Box\Diamond p) \wedge \Diamond q \models (\Box\Diamond p)Uq$
2.  $\Box p \models \Box\Diamond p \models \Diamond p$
3.  $(\Diamond p) \rightarrow \Box\Diamond q \models \Box(\neg p \vee \Box\Diamond q)$

**1** Die Aussage ist wahr. Nimm an,  $M, 0 \models (\Box\Diamond p) \wedge \Diamond q$ , also insbes.  $M, 0 \models \Box\Diamond p$ . Da diese Aussage eine  $\Box$  enthält, gilt f.a.  $n > 0$ ,  $M, n \models \Box\Diamond p$ . Weiterhin gibt es ein  $m$  so dass  $M, m \models q$ , und insbesondere f.a.  $n' : 0 \leq n' < m$ ,  $M, n' \models \Diamond p$ . Also:  $M, 0 \models (\Box\Diamond p)Uq$ . QED

**2** N.a.  $M \models \Box p$ . Also gibt es unendlich viele Punkte  $n$  s.d.  $M, n \models p$ . Also  $M \models \Box\Diamond p$ .  
N.a.  $M \models \Box\Diamond p$ . Also gibt es Punkte  $n > 0$  s.d.  $M, n \models p$ . Also  $M \models \Diamond p$ . QED

**3** Assume  $M \models (\Diamond p) \rightarrow \Box\Diamond q$ . Das kann wahr sein auf zwei Arten:

**Fall 1:**  $M \not\models \Diamond p$ .

Also:  $M \models \neg\Diamond p$  (negation definition)

Also:  $M \models \Box\neg p$  (Dualität)

Also:  $M \models \Box(\neg p \vee \Box\Diamond q)$  ( $\Box$  ist monoton als Operator)

**Fall 2:**  $M \models \Box\Diamond q$ . Dann gilt auch  $M \models (\neg p \vee \Box\Diamond q)$ . QED