Logik der Ambiguität 2

Christian Wurm (Düsseldorf)

Düsseldorf, 16.11.2021

Logik der Ambiguität: Was bisher geschah

Wir haben bislang die Logik *MAL* betrachtet. *MAL* war sehr einfach:

$$\alpha \Rightarrow \beta \text{ gdw. } \blacksquare\alpha \models \blacksquare\beta \text{ und } \blacklozenge\alpha \models \blacklozenge\beta$$

Damit ist *MAL* im Kern eine Logik, die auf **klassischer Wahrheit** basiert.

Gleichzeitig ist *MAL* eine Logik des Misstrauens:

- $\alpha \Rightarrow \beta$ bedeutet: unter jeder Lesart und jeder Interpretation impliziert α β.

Logik der Ambiguität: Was bisher geschah

Misstrauen hat eine formale Entsprechung:

$$\text{Misstrauen} \cong \text{Kein Abschluss unter Substitution}$$

Intuition dahinter:

> *Wie soll ich wissen, ob $\alpha \vee \neg\alpha$ wahr ist, wenn ich nicht weiß was α ist? Vielleicht ist es ambig, und man will mich hier verschaukeln!*

Sinnvoll wenn man redet mit

- Dem Teufel
- Dem (gegnerischen) Anwalt
- unter der Annahme, dass Aussagen von verschiedenen, unabhängigen Quellen stammen
- ...

MAL: Probleme

Probleme mit MAL sind folgende:

1. MAL erfasst nicht unsere normale Kommunikation. Wir sind doch im wesentlichen kooperativ, wenn wir miteinander sprechen (unkooperatives Sprechen bleibt Gott sei Dank die Ausnahme!)

2. Linguistische Bedeutungen bleiben immer bis zu einem gewissen Punkt opak. Das bedeutet aber: ein Argument auf Basis linguistischer Bedeutungen kann niemals endgültig akzeptiert werden (denn ein Schema ist niemals valide in *MAL*, nur die konkrete Instanz)!

3. Also müssten wir erst ein Gutachten in Auftrag geben, bevor wir ein Argument akzeptieren können.

Alternative zu MAL

Was ich suchte war also:

- Eine Logik, die abgeschlossen ist unter Substitution, so dass wir Argumente/Inferenzen schematisch verifizieren können.
- Eine Logik, die als Modell taugt für **kooperative Kommunikation**, oder anders gesagt: vertrauensvolle Kommunikation.
- Diese Logik kann wohl nicht auf der Basis von klassischer Wahrheit entstehen: hier gibt es nur die *worst-case* Logik *MAL*.

Wir kommen zu *TAL*, der Logik des Vetrauens.

Alternative zu MAL

Erinnern wir uns des wichtigen Grundsatzes:

Algebraische Einsicht

Eine Logik der Ambiguität ist zwangsläufig entweder unalgebraisch, d.h. nicht geschlossen unter Substitution oder Kongruenz, – oder sie ist unsinnig.

Wir haben mit *MAL* nun eine Variante probiert, jetzt kommen wir zur Kongruenz (bzw. Aufgeben davon).

Logik ohne Algebra – Variante 1

Wir suchen eine Logik, die *keine* algebraische Semantik hat.

Einziger Ausweg: **Algebra selbst** ist das Problem! Insbesondere zwei Eigenschaften:

1. Kongruenz (Transitivität als Spezialfall)
2. Abschluss unter Substitution

Wir betrachten heute 1.:

> *Eine Logik die inkongruent ist, also logische Äquivalenz (wechselseitige Inferenz) nicht Ersetzbarkeit garantiert.*

VerTrauensvolle AmbiguitätsLogik (TAL)

Wir betrachten nun die Logik TAL.

- TAL ist geschlossen unter Substitution. Also: eine Inferenz ist valide nach ihrer äußeren Form!
- TAL ist **inkongruent**, d.h.: $\alpha \dashv\vdash \beta$ impliziert nicht $\Gamma[\alpha] \dashv\vdash \Gamma[\beta]$ ($\alpha \dashv\vdash \beta$ ist kurz für $\alpha \vdash \beta$ und $\beta \vdash \alpha$)
- TAL ist nicht reduzierbar auf klassische Wahrheit (soweit ich das sehen kann, bislang...)

Logik der Ambiguität II

Wir haben uns *MAL* von der semantischen Seite genähert.
Wir nähern uns *TAL* von der syntaktischen Seite, also: **Beweistheorie**.

Sprich:

- Wir definieren eine Gentzen-Kalkül Beweistheorie für *TAL*
- Wir betrachten die formalen Eigenschaften des Kalküls
- Dann überlegen wir uns eine sinnvolle Semantik für Formeln

Multi-Sequenten

Um einen Beweiskalkül für TAL zu konstruieren, brauchen wir komplexere Strukturen, sog. Multi-Sequenten.

- In klassischer Logik: $\alpha_1, ..., \alpha_i \vdash \beta_1, ..., \beta_j$ bedeutet: $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_i \vdash \beta_1 \vee ... \vee \beta_j$
- Das lässt uns keine Möglichkeit, $\|$ einzuführen.
- Deswegen brauchen wir eine neue Struktur: $\alpha_1; \alpha_2 \vdash \beta_1; \beta_2$ bedeutet: $\alpha_1 \| \alpha_2 \vdash \beta_1 \| \beta_2$
- Aber: wir müssen hier schauen, dass wir den Überblick behalten (Klammerung!)
- Deswegen: Multi-Sequenten

Multi-Sequenten

Multi-Kontexte sind wie folgt definiert:

1. ϵ, wobei ϵ die leere Sequenz ist, ist ein wohlgeformter klassischer Kontext (der leere Kontext)
2. Falls $\gamma \in \mathtt{WFF}$, dann ist γ ein wohlgeformter klassischer Kontext
3. Falls $\Gamma_1, ..., \Gamma_i$ wohlgeformte Kontexte sind, dann ist $(\Gamma_1, ..., \Gamma_i)$ ein wohlgeformter klassischer Kontext
4. Falls Γ_1, Γ_2 wohlgeformte Kontexte sind dann ist $(\Gamma_1; \Gamma_2)$ ein wohlgeformter ambiger Kontext

Multi-Sequenten

Multi-Sequenten sind wie folgt definiert:

1. ϵ, wobei ϵ die leere Sequenz ist, ist ein wohlgeformter klassischer Kontext (der leere Kontext)
2. Falls $\gamma \in \mathtt{WFF}$, dann ist γ ein wohlgeformter klassischer Kontext
3. Falls $\Gamma_1, ..., \Gamma_i$ wohlgeformte Kontexte sind, dann ist $(\Gamma_1, ..., \Gamma_i)$ ein wohlgeformter klassischer Kontext
4. Falls Γ_1, Γ_2 wohlgeformte Kontexte sind dann ist $(\Gamma_1; \Gamma_2)$ ein wohlgeformter ambiger Kontext

Intuitiv gibt es zwei wichtige Konstruktoren für Kontexte:

- (α, β) (klassisch, entspricht $\alpha \wedge \beta$ links, $\alpha \vee \beta$ rechts)
- $(\alpha; \beta)$ (ambig, entspricht $\alpha \| \beta$ *immer*)

Der Rest sind eher technische Details.

TAL: Gentzen Kalkül

Die Modalität , bettet den klassischen Kalkül ein. Deswegen haben wir die folgenden Regeln:

$$(\mathsf{ax})\ \frac{}{\alpha, \Gamma \vdash \alpha, \Delta}$$

$$(\wedge\mathsf{l})\ \frac{\Gamma[\alpha, \beta] \vdash \Theta}{\Gamma[\alpha \wedge \beta] \vdash \Theta} \qquad (\mathsf{l}\wedge)\ \frac{\Gamma \vdash \Theta[\alpha] \quad \Gamma \vdash \Theta[\beta]}{\Gamma \vdash \Theta[\alpha \wedge \beta]}$$

$$(\vee\mathsf{l})\ \frac{\Gamma[\alpha] \vdash \Theta \quad \Gamma[\beta] \vdash \Theta}{\Gamma[\alpha \vee \beta] \vdash \Theta} \qquad (\mathsf{l}\vee)\ \frac{\Gamma \vdash \Theta[\alpha, \beta]}{\Gamma \vdash \Theta[\alpha \vee \beta]}$$

TAL: Gentzen Kalkül

Schwächung und Kontraktion sind zulässig in dem Kalkül, also brauchen wir nur Kommutativität:

$$(,\text{comm})\ \frac{\Gamma[\Psi, \Theta]}{\Gamma[\Theta, \Psi]}. \qquad (,\text{weak})\ \frac{\Gamma[\Delta]}{\Gamma[\Delta, \Psi]} \qquad (,\text{contr})\ \frac{\Gamma[\Delta, \Delta]}{\Gamma[\Delta]}$$

(Notation bedeutet: auf beiden Seiten)

Beachte: Multikontexte sind ja keine Mengen, sondern Terme!

TAL: Gentzen Kalkül

Die Einführung von ; generalisiert (mon),(inf):

$$(\mathrm{I;I})\quad \frac{\Gamma, \Lambda \vdash \Delta, \Psi \quad \Theta, \Lambda \vdash \Phi, \Psi}{(\Gamma; \Theta), \Lambda \vdash (\Delta; \Phi), \Psi}$$

Man könnte auch mehrere einfache Regeln machen:

$$(;1)\ \frac{\Gamma \vdash \Theta \quad \Delta \vdash \Phi}{(\Gamma; \Delta) \vdash (\Theta; \Phi)} \qquad (;2)\ \frac{\Gamma \vdash \Theta \quad \Delta \vdash \Theta}{(\Gamma; \Delta) \vdash \Theta} \qquad (;3)\ \frac{\Theta \vdash \Gamma \quad \Theta \vdash \Delta}{\Theta \vdash (\Gamma; \Delta)}$$

(I;I) generalisiert alle diese Regeln.

TAL: Gentzen Kalkül

Die Regeln für $\|$ sind nun sehr einfach:

$$(\|\mathsf{I})\ \frac{\Gamma[\alpha;\beta] \vdash \Theta}{\Gamma[\alpha\|\beta] \vdash \Theta} \qquad (\mathsf{I}\|)\ \frac{\Gamma \vdash \Theta[\alpha;\beta]}{\Gamma \vdash \Theta[\alpha\|\beta]}$$

TAL: Gentzen Kalkül

(;contr) ist zulässig im Kalkül (brauchen wir also nicht).

$$(;\text{ass})\ \frac{\Psi[(\Gamma;(\Delta;\Theta))]}{\Psi[((\Gamma;\Delta);\Theta))]} \qquad (;\text{contr})\ \frac{\Gamma[(\alpha;\alpha)]}{\Gamma[\alpha]}$$

TAL: Gentzen Kalkül

Es fehlt noch die Negation. Wir haben hier die klassische Regel, leicht generalisiert

$$(\neg\mathsf{I})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, (\alpha_1; ...; \alpha_i)}{\Gamma, (\neg\alpha_1; ...; \neg\alpha_i) \vdash \Delta} \qquad (\mathsf{I}\neg)\ \frac{\Gamma, (\alpha_1; ...; \alpha_i) \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, (\neg\alpha_1; ...; \neg\alpha_i)}$$

Falls $i = 1$, dann haben wir die klassische Regel. Das garantiert Distribution von $\neg$.

TAL: Schnitt

Jetzt kommt die Regel (schnitt), die in unserem Fall eine ganz besondere Stellung einnimmt.

$$\text{(schnitt)}\ \frac{\Gamma[\alpha] \vdash \Psi \quad \Delta \vdash \alpha, \Theta}{\Gamma[\Delta] \vdash \Psi, \Theta} \qquad \text{(einfacher)}\ \frac{\Gamma[\alpha] \vdash \Psi \quad \Delta \vdash \alpha,}{\Gamma[\Delta] \vdash \Psi}$$

Wir werden das unten besprechen.

TAL ohne Schnitt

Wenn wir (schnitt) *nicht* haben, dann brauchen wir noch folgende beiden Regeln:

$$\text{(distr)}\quad \frac{\Gamma[(\Delta;\Psi),\Theta_1] \quad \Gamma[(\Delta;\Psi),\Theta_2]}{\Gamma[(\Delta,\Theta_1);(\Psi,\Theta_2)]}$$

$$\text{(subst)}\quad \frac{\Gamma[\Psi] \quad \Gamma[(\Delta;\beta;\Delta')]}{\Gamma[(\Delta;\Psi;\Delta')]}$$

TAL ohne Schnitt: (distr)

$$\text{(distr)}\quad \frac{\Gamma[(\Delta;\Psi),\Theta_1] \quad \Gamma[(\Delta;\Psi),\Theta_2]}{\Gamma[(\Delta,\Theta_1);(\Psi,\Theta_2)]}$$

Das ist eine Distributionsregel: setze $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$. Dann bekommen wir z.B.

$$\frac{\Gamma[(\Delta;\Psi),\Theta] \vdash \Xi}{\Gamma[(\Delta,\Theta);(\Psi,\Theta)] \vdash \Xi}$$

TAL ohne Schnitt: (subst)

$$\text{(subst)} \quad \frac{\Gamma[\Psi] \quad \Gamma[(\Delta; \beta; \Delta')]}{\Gamma[(\Delta; \Psi; \Delta')]}$$

Nimm an, $\Gamma[\psi] \vdash \Xi$ und $\Gamma[(\delta; \beta; \delta')] \vdash \Xi$

Dann gilt: $\Gamma[\delta \| \beta \| \delta'] \vdash \Xi$

Also: $\Gamma[(\delta \| \beta \| \delta') \vee \psi] \vdash \Xi$

Also: $\Gamma[(\delta \vee \psi) \| (\beta \vee \psi) \| (\delta' \vee \psi)] \vdash \Xi$

Also: $\Gamma[\delta \| \psi \| \delta'] \vdash \Xi$

Das ist eine Instanz von (subst)!

TAL: Konventionen

- Die Logik mit (schnitt), aber ohne (distr) und (subst), nennen wir TAL^{kong}.
- Die Logik ohne (schnitt), aber mit (distr) und (subst), nennen wir *TAL*.
- Die Logik ohne beides ist keine Ambiguitätslogik
- Die Logik mit beiden ist äquivalent zu TAL^{kong}.

TAL: Konventionen

- Die Logik mit beiden ist äquivalent zu TAL^{kong}.

Das müssen wir kurz klären: nehmen wir erstmal folgenden Beweis:

$$\frac{\Delta, \Theta_1 \vdash \Delta, \Theta_1 \vee \Theta_2) \quad \Psi, \Theta_2 \vdash \Psi, \Theta_1 \vee \Theta_2))}{(\Delta, \Theta_1); (\Psi, \Theta_2)) \vdash (\Delta; \Psi), \Theta_1 \vee \Theta_2}$$

Nun können wir, mit (schnitt), (subst) *simulieren*, z.B.

$$\frac{(\Delta, \Theta_1); (\Psi, \Theta_2) \vdash (\Delta; \Psi), \theta_1 \vee \theta_2 \qquad \dfrac{\Gamma[(\Delta; \Psi), \Theta_1] \vdash \Xi \quad \Gamma[(\Delta; \Psi), \Theta_2] \vdash \Xi}{\Gamma[(\Delta; \Psi), \theta_1 \vee \theta_2] \vdash \Xi}}{\Gamma[(\Delta, \Theta_1); (\Psi, \Theta_2)] \vdash \Xi} \text{(schnitt)}$$

Ähnlich auf der rechten Seite, ebenso mit (subst). (schnitt) macht also alle diese Regeln überflüssig!

TAL^{kong} und TAL

Tatsächlich ist es leicht, folgendes zu zeigen:

Abschluss unter Substitution

1. Falls $\Gamma \vdash \Delta$ in TAL^{kong}, $\overline{\sigma}$ eine uniforme Substitution, dann gilt: $\overline{\sigma}(\Gamma) \vdash \overline{\sigma}(\Delta)$ in TAL^{kong}.
2. Falls $\Gamma \vdash \Delta$ in TAL, $\overline{\sigma}$ eine uniforme Substitution, dann gilt: $\overline{\sigma}(\Gamma) \vdash \overline{\sigma}(\Delta)$ in TAL.

Das ist relativ offensichtlich, wenn wir überlegen dass unser Beweiskalkül (alle Regeln) grundsätzlich geschlossen ist unter Substitution.

TAL^{kong} und (schnitt)

Aber jetzt kommt es:

Kongruenz

Nimm an, $\alpha \dashv\vdash \beta$ in TAL^{kong} (logisch äquivalent). Dann gilt: $\Gamma[\alpha] \dashv\vdash \Gamma[\beta]$.

Beweis ist geradeaus: nutze einfach (schnitt):

$$\frac{\Gamma[\beta] \vdash \Gamma[\beta] \quad \alpha \vdash \beta}{\Gamma[\alpha] \vdash \Gamma[\beta]} \text{ (schnitt)}$$

TAL^{kong} und (schnitt)

Kongruenz

Nimm an, $\alpha \dashv\vdash \beta$ in TAL^{kong} (logisch äquivalent). Dann gilt: $\Gamma[\alpha] \dashv\vdash \Gamma[\beta]$.

Das bedeutet:

- TAL^{kong} hat eine algebraische Semantik!

Was könnte das sein? Wir definieren zunächst den Begriff der Interpretation:

TAL^{kong}: Interpretation

Sei

- $\mathbf{U} \in \mathbf{UDA}$ eine Algebra,
- $\tau : Var \to U$ is an (atomic) interpretation.

Wir definieren $\overline{\tau}, \underline{\tau}$ durch

1.	$\overline{\tau}(p)$	$=$	$\tau(p)$	$=$	$\underline{\tau}(p)$, for $p \in Var$.
2.	$\overline{\tau}(\phi \wedge \chi)$	$=$	$\overline{\tau}(\phi) \wedge \overline{\tau}(\chi)$	$=$	$\underline{\tau}(\phi \wedge \chi)$
3.	$\overline{\tau}(\phi \vee \chi)$	$=$	$\overline{\tau}(\phi) \vee \overline{\tau}(\chi)$	$=$	$\underline{\tau}(\phi \vee \chi)$
4.	$\overline{\tau}(\neg\chi)$	$=$	$\sim \overline{\tau}(\chi)$	$=$	$\underline{\tau}(\neg\chi)$
5.	$\overline{\tau}(\phi \| \chi)$	$=$	$\overline{\tau}(\phi) \| \overline{\tau}(\chi)$	$=$	$\underline{\tau}(\phi \| \chi)$
6.	$\overline{\tau}(\Gamma_1, ..., \Gamma_i)$	$=$	$\overline{\tau}(\Gamma_1) \vee ... \vee \overline{\tau}(\Gamma_i)$		
7.	$\underline{\tau}(\Gamma_1, ..., \Gamma_i)$	$=$	$\underline{\tau}(\Gamma_1) \wedge ... \wedge \underline{\tau}(\Gamma)$		
8.	$\overline{\tau}(\Gamma; \Delta)$	$=$	$\overline{\tau}(\Gamma) \| \overline{\tau}(\Delta)$		
9.	$\underline{\tau}(\Gamma; \Delta)$	$=$	$\underline{\tau}(\Gamma) \| \underline{\tau}(\Delta)$		

TAL^{kong}: Interpretation

Beachte:

- $\overline{\tau}$ and $\underline{\tau}$ fallen zusammen auf Formeln
- $\overline{\tau}$ and $\underline{\tau}$ sind identisch ';'
- aber unterscheiden sich für ',' ($\vee$ bzw. $\wedge$)

Ebenso definieren wir:

1. $\mathbf{U}, \tau \models \Gamma \vdash \Delta$ gdw. $\underline{\tau}(\Gamma) \leq_U \overline{\tau}(\Delta)$ (Wahrheit in Algebra);
2. Spezialfall: $\mathbf{U}, \tau \models \Delta$ iff $1_U \leq_U \overline{\tau}(\Delta)$.
3. $\mathbf{UDA} \models \Gamma \vdash \Delta$ gdw. $\mathbf{U} \in \mathbf{UDA}$, $\tau : Var \to U$, gilt: $\mathbf{U}, \tau \models \Gamma \vdash \Delta$ (Validität in Klasse)

TAL^{kong}: Vollständigkeit

Vollständigkeit für UDA

UDA $\models \Gamma \vdash \Delta$ genau dann wenn $\Gamma \vdash \Delta$ beweisbar ist in TAL^{kong}.

Das geht relativ einfach, hat aber sehr weitreichende Konsequenzen. Hier eine Auswahl:

Randlemma für TAL^{kong}

Nimm an, $\alpha_1 \vdash \beta_1$, $\alpha_2 \vdash \beta_2$. Dann gilt: für beliebige γ, δ: $\alpha_1 \| \gamma \| \alpha_2 \vdash \beta_1 \| \delta \| \beta_2$

Das folgt direkt aus dem Randlemma, übersetzt in Logik.

TAL^{kong}: Ausschluss

Nimm folgende Regel:

$$(;\text{komm})\ \frac{\Gamma[(\Theta;\Psi)]}{\Gamma[(\Psi;\Theta)]}$$

Das liefert uns kommutative Ambiguität.

Inkonsistenz

Die Logik TAL^{kong} mit (;komm) ist inkonsistent, d.h. *jeder* Sequent $\Gamma \vdash \Delta$ ist ableitbar.

Das ist das logische Gegenstück zu Trivialität in der kommutativen UDA.

- TAL^{kong} ist keine passende Logik für Ambiguität!

TAL: Die Logik des Vetrauens

Also betrachten wir *TAL*. Erstmal folgende, einfache Ergebnisse:

Konservative Erweiterung

Nimm an, α, β sind Formeln klassischer Logik. Dann gilt: $\alpha \vdash \beta$ ist beweisbar in *TAL* gdw. es beweisbar ist in klassischer Logik.

Beweis

$\Leftarrow$ Wir erweitern ja den klassischen Kalkül.

$\Rightarrow$ Wenn wir eine nicht-klassische Regel nutzen, haben wir ein ambiges Symbol (; oder $\|$). Es gibt aber keine Regeln, die uns erlaubt, die ambigen Symbol zu eliminieren!

TAL: Die Logik des Vetrauens

Hieraus folgt ohne weiteres:

Kein Schnitt

Die Regel (schnitt) ist in *TAL* nicht zulässig.

Insbesondere folgt natürlich: *TAL* zusammen mit (;komm) ist *nicht* inkonsistent!

***TAL* ist inkongruent**

Es gibt Formeln α, β in TAL so dass:

1. $\alpha \vdash \beta$ (in TAL), aber
2. $\Gamma[\alpha] \nvdash \Gamma[\beta]$!

Ein Beispiel?

TAL: Die Logik des Vetrauens

Ein Beispiel?

Wegen Abschluss unter Substitution gilt:

$$(p \| q) \vee \neg(p \| q) \tag{1}$$

ist ein Theorem in TAL.
Wegen universeller Distribution gilt dann:

$$(p \vee \neg p) \| (p \vee \neg q) \| (q \vee \neg p) \| (q \vee \neg q) \tag{2}$$

ist ein Theorem in TAL.
Aber: wenn wir $p \vee \neg p$ vertauschen mit $r \vee \neg r$, dann ist es kein Theorem mehr:

$$(r \vee \neg r) \| (p \vee \neg q) \| (q \vee \neg p) \| (q \vee \neg q) \tag{3}$$

ist nicht ableitbar!

Die Logik des Vertrauens

Was haben diese Ergebnisse zu bedeuten? Zunächst einmal positiv:

- TAL unterstützt Modus Ponens: $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$
- Ebenso Disambiguierung: $\alpha \| \beta, \neg\alpha \vdash \beta$
- Ebenso Universelle Distribution
- Ebenso $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \| \beta \vdash \alpha \vee \beta$
- Der Abschluss unter Substitution bedeutet soviel wie: Argumente sind *schematisch valide*: wir müssen nicht hineinschauen, wir *vertrauen*.

Die Logik des Vertrauens

Hier noch ein weiteres positives Ergebnis. Sei TAL^{komm} die Logik TAL mit der Regel (;komm). Dann gilt:

Lemma

Falls $\Gamma \Rightarrow_{MAL} \alpha$, dann $\Gamma \vdash \alpha$ ist beweisbar in TAL^{komm}.

D.h.: die misstrauischen Argumente mit Ambiguität sind weniger als die vertrauensvollen – so wie es sein soll!

(Für *TAL* gilt das nicht, denn *TAL* ist nicht kommutativ, im Gegensatz zu *MAL*!)

Die Logik des Vertrauens

Aber was bedeutet die Inkongruenz? TAL ist übrigens auch intransitiv:

TAL ist intransitiv

Es gibt TAL-Formeln α, β, γ so dass

1. $\alpha \vdash \beta$
2. $\beta \vdash \gamma$
3. aber $\alpha \nvdash \gamma$!

Widerspricht es nicht unserer Intuition von Logik, wenn Inferenzen nicht transitiv sind?

Siehe Wasser und Eis!

Inkongruenz und Intuition

Transitivität bedeutet: wir können den Zwischenschritt auslassen, seine genaue Form ist irrelevant (siehe β).

Das stimmt sicher für unambige Bedeutungen.

Aber: bei ambigen Bedeutungen spielt die syntaktische Form eine wichtiger Rolle:

- wir müssen uns syntaktische Form "merken" –
- Transitivität und Kongruenz macht syntaktische Form austauschbar!
- Deswegen sind sie nicht zulässig!

Inkongruenz und Intuition

Am Ende gibt es also

Die Moral von der Geschicht

Ambiguität steht *zwischen* Syntax und Semantik. Wenn wir sie in die Semantik bringen, dann wird die Syntax in der Semanik wichtiger!

Nachtrag: Natürliche Sprache ist inkongruent

Propositionale Einstellungen:

- Er glaubt dass P
- Er denkt dass P
- Er sagt dass P

(1) a. In PA gilt $2 + 2 = 4$
b. In PA gilt $2 + 2 = 5$
c. In PA gilt, die starke Goldbachsche Vermutung ist wahr.

Offensichtlich ist die starke Goldbachsche Vermutung wahr oder falsch in Peano Arithmetik. Dementsprechend gilt:

Wahrheitstheoretisch ist (1-c) entweder äquivalent zu (1-a) oder (1-b).

Nachtrag: Natürliche Sprache ist inkongruent

Wahrheitstheoretisch ist (1-c) entweder äquivalent zu (1-a) oder (1-b).

Aber: die Sätze sind offensichtlich nicht beliebig austauschbar in allen Kontexten!

(2) a. Er glaubt, dass in PA gilt $2 + 2 = 4$
b. Er glaubt, dass in PA gilt $2 + 2 = 5$
c. Er glaubt, dass in PA gilt, die starke Goldbachsche Vermutung ist wahr.

Aber z.B. gilt: (3) ist äquivalent zu (1-b):

(3) Er glaubt, dass in PA gilt $2 + 2$ ist 1 mehr als 4.

Wir können also sagen: natürlich Sprache ist inkongruent:

- Logische Äquivalenz bedeutet nicht Ersetzbarkeit in allen Kontexten
- Gewisse Sätze, die syntaktisch verschieden sind, scheinen aber trotzdem kongruent zu sein!
- Was "bedeutet" also Kongruenz? Das scheint mir fast wie die Mutter aller Fragen...