Logik der Ambiguität 1

Christian Wurm (Düsseldorf)

Düsseldorf, 13.4.2023

Inferenzen mit Ambiguität

Warum sollte man Schlussfolgerungen ziehen mit Ambiguität? Computerlinguistisch gefragt: reicht es nicht zu disambiguieren (dazu später mehr)?

Die Antwort lautet **nein**. Warum?

- Disambiguierung ist nur eine spezielle Inferenz: $\alpha \| \beta \| \gamma, \neg\beta \vdash \alpha \| \gamma$
- Es gibt aber noch viele andere:
  - $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \| \beta \vdash \alpha \vee \beta$
  - $\alpha \| \beta \vdash (\alpha \vee \gamma) \| \beta$
  - $\alpha \| \gamma \vdash (\alpha \| \beta \| \gamma) \vee \neg\beta$ (Ko-Disambiguierung)
  - ...

Inferenzen mit Ambiguität

Ambige Inferenzen braucht man an einigen Stellen:

- Textual entailment (impliziert ein Text einen anderen)
- Ontologie: über natürliche Sprache dringt Ambiguität (besonders Polysemie) auch in formale Ontologien ein:
  - Z.B. "Entzündung" ist ambig zwischen einem Prozess (Ereignis) und seinem Ergebnis (PO).
  - Prüfung von Konsistenz und Inferenz ist Sinn und Zweck von Ontologien
  - Ohne Darstellung von Ambiguität bleiben gewisse Polyseme problematisch, insbesondere für Laiennutzer (Mediziner in Biomedizinischen Ontologien)

Algebra der Ambiguität

Wir habens mit Algebra versucht, genauer gesagt mit erweiterten BAs.

Wir haben einen zusätzlichen Konnektor $\|$ definiert mit einer minimalen Menge von Axiomen.

Das Problem war: selbst die minimal-plausibelsten Axiome haben zu völlig unplausiblen Konsequenzen geführt:

- Universelle Distribution ist die Essenz von Ambiguität
- $a = a\|b$ oder $b = a\|b$ führt zu **Uniformität** (Richtung von $\|$ global festgelegt)
- $a \wedge b \leq a\|b \leq a \vee b$ (mit Assoz.) führt zum **Randlemma** $a\|b\|c = a\|c$.

Die Schlussfolgerung ist hier: **Algebra selbst** ist nicht geeignet, das Phänomen zu beschreiben; wir werden später sehen warum.

Logik der Ambiguität

Wir versuchens mit Logik, genauer gesagt Aussagenlogik.

Wir erweitern einfach unsere propositionale Formelsprache mit dem Konnektor $\|$:

- Falls $p \in Var$, dann $p \in \mathtt{WFF}$;
- falls $\alpha, \beta \in \mathtt{WFF}$, dann $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \| \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\neg \alpha) \in \mathtt{WFF}$;
- sonst ist nix $\mathtt{WFF}$.

Logik der Ambiguität

Wir versuchens mit Logik, genauer gesagt Aussagenlogik.

Wir erweitern einfach unsere propositionale Formelsprache mit dem Konnektor $\|$:

- Falls $p \in Var$, dann $p \in \mathtt{WFF}$;
- falls $\alpha, \beta \in \mathtt{WFF}$, dann $(\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \| \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\neg \alpha) \in \mathtt{WFF}$;
- sonst ist nix $\mathtt{WFF}$.

Logik der Ambiguität

Wir suchen übrigens *nicht* die Logik von UDA:

- Die gibt es (hab ich mal gemacht),
- aber die Ergebnisse für UDA zeigen, dass man das gerade nicht will!
- UDA erfüllt ja das Randlemma, war also inadäquat!

Wir bemühen uns also um einen eigenständigen logischen Ansatz, – und der soll eben keine algebraische Entsprechung haben!

Logik ohne Algebra

Wir suchen eine Logik, die *keine* algebraische Semantik hat.

Wir erinnern uns: **Algebra selbst ist das Problem**! Einziger Ausweg: **Algebra selbst** ist das Problem! Insbesondere zwei Eigenschaften:

1. Kongruenz (Transitivität als Spezialfall)
2. Abschluss unter Substitution

Wir betrachten heute 2.

Uniforme Substitution

Sei $\sigma : \mathit{Var} \to \mathtt{WFF}$ eine Funktion (von Variablen zu Formeln). Daraus macht eine uniforme Substitution $\overline{\sigma}$ mittels

- $\overline{\sigma}(p) = \sigma(p)$, $p \in \mathit{Var}$
- $\overline{\sigma}(\alpha \wedge \beta) = \overline{\sigma}(\alpha) \wedge \overline{\sigma}(\beta)$
- $\overline{\sigma}(\alpha \vee \beta) = \overline{\sigma}(\alpha) \vee (\beta)$
- $\overline{\sigma}(\alpha \to \beta) = \overline{\sigma}(\alpha) \to \overline{\sigma}(\beta)$
- $\overline{\sigma}(\neg\alpha) = \neg\overline{\sigma}(\alpha)$

Jede normale Logik ist abgeschlossen unter uniformer Substitution.

Logik ohne Substitution

Wir betrachten heute:

2. Kein Abschluss unter Substitution

Das bedeutet folgendes:

Sei $\sigma : \mathit{Var} \to \mathtt{WFF}$ eine Substitution.

$$\alpha \models \beta \text{ impliziert } \textit{nicht } \overline{\sigma}(\alpha) \models \overline{\sigma}(\beta)$$

(Um das zu klären: das gilt eigentlich in allen vernünftigen Logiken)

Misstrausche AmbiguitätsLogik (MAL)

Wir betrachten nun die Logik MAL.

- MAL ist nicht geschlossen unter Substitution.
- Allerdings hat MAL eine sehr natürliche, unabhängige Motivation!
- Entdeckt von van Eijck, Jaspars: Reasoning with Ambiguity.

Logik der Ambiguität

Welche Semantik (und Beweistheorie!) bekommt $\|$? Wir nutzen hier folgende Beobachtung: Wir möchten:

$$\alpha \wedge \beta \models \alpha \| \beta \models \alpha \vee \beta.$$

Hieraus können wir zwei Schlüsse ziehen:

1. Falls $M \models \alpha \wedge \beta$, dann $M \models \alpha \| \beta$
2. Falls $M \not\models \alpha \vee \beta$, dann $M \not\models \alpha \| \beta$

Die Logik *MAL* beruht auf der Beobachtung, dass nur verifizieren/nicht verifizieren evtl. zuwenig ist bei Ambiguität.

Verifizierung und Falsifizierung (nach Van Eijck)

Wir machen also zunächst eine wichtige Unterscheidung:

- Modelle **verifizieren** eine Formel,
- Modelle verifizieren eine Formel *nicht*,
- Modelle **falsifizieren** eine Formel,
- Modelle falsifizieren eine Formel *nicht*,

Und alle diese Begriffe fallen *nicht* zusammen. Wir brauchen also

- Zwei Relationen $\models$, $\rightsquigarrow$, sowie
- deren Negation $\not\models$, $\not\rightsquigarrow$

Verifizierung und Falsifizierung (nach Van Eijck)

Für klassische Formeln α gilt offensichtlich:

$$M \not\models \alpha \text{ gdw. } M \rightsquigarrow \alpha$$
$$M \not\rightsquigarrow \alpha \text{ gdw. } M \models \alpha$$

Das stimmt aber für amige Formeln gerade *nicht*.

Essenz der Ambiguität

Ambige Aussagen sind, in manchen Modellen, nicht streng genommen wahr und nicht streng genommen falsch – sie können keines von beiden sein.

Alternativ könnte man übrigens auch sagen: sie sind lax wahr *und* lax falsch, aber EJ ziehen obige Beschreibung vor.

Verifizierung und Falsifizierung: Beispiel

Nimm drei klassische Modelle

1. $M_1 = \emptyset$
2. $M_2 = \{p\}$
3. $M_3 = \{p, q\}$

Außerdem die Formel $p \| q$. Dann bekommen wir:

1. $M_1 \rightsquigarrow p \| q$ (denn $M \not\models p \vee q$)
2. $M_2 \not\rightsquigarrow p \| q$, $M_2 \not\models p \| q$
3. $M_3 \models p \| q$ (denn $M \models p \wedge q$)

Offensichtlich gilt immer:

$$M \rightsquigarrow \alpha \text{ impliziert } M \not\models \alpha$$
$$M \models \alpha \text{ impliziert } M \not\rightsquigarrow \alpha$$

Verifizierung und Falsifizierung

Wir haben also eine Art trivalente Logik (davon gibt es viele berühmte Beispiele), mit

1. α ist wahr im Modell
2. α ist falsch im Modell
3. α ist weder streng wahr noch streng falsch im Modell!

Verifizierung und Falsifizierung

Wir kommen nun zu den üblichen Definitionen; die müssen wir aber doppeln:

1. Wir brauchen induktive Definitionen für die Wahrheit von Formeln, und
2. wir brauchen induktive Definitionen für die Falschheit von Formeln!

Verifizierung und Falsifizierung: Definitionen von *MAL*

$\models$1 $M \models p_i$ genau dann wenn $p_i \in M$.

$\models$2 $M \models \alpha \wedge \beta$, genau dann wenn $M \models \alpha$ und $M \models \beta$.

$\models$3 $M \models \alpha \vee \beta$, genau dann wenn mindestens eines der beiden gilt, $M \models \alpha$ oder $M \models \beta$.

$\models$4 $M \models \neg\alpha$, genau dann wenn $M \rightsquigarrow \alpha$ (*nicht* $M \not\models \alpha$!!)

$\models$5 $M \models \alpha \rightarrow \beta$, gdw. mindestens eines der beiden gilt, $M \rightsquigarrow \alpha$ oder $M \models \beta$ (es gilt: $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$)

$\models$6 $M \models \alpha \| \beta$, genau dann wenn $M \models \alpha \wedge \beta$.

Sprich: in Bezug auf Wahrheit verhält sich Ambiguität so wie $\wedge$!

Verifizierung und Falsifizierung: Definitionen *MAL*

$\rightsquigarrow$1 $M \rightsquigarrow p_i$ genau dann wenn $p_i \notin M$ (wie klassisch $M \not\models p_i$)

$\rightsquigarrow$2 $M \rightsquigarrow \alpha \wedge \beta$, genau dann wenn mindestens eines der beiden gilt, $M \rightsquigarrow \alpha$ oder $M \rightsquigarrow \beta$

$\rightsquigarrow$3 $M \rightsquigarrow \alpha \vee \beta$, genau dann wenn $M \rightsquigarrow \alpha$ und $M \rightsquigarrow \beta$

$\rightsquigarrow$4 $M \rightsquigarrow \neg\alpha$, gdw. $M \models \alpha$ (nicht $M \not\rightsquigarrow \alpha$!)

$\rightsquigarrow$5 $M \rightsquigarrow \alpha \rightarrow \beta$, gdw. $M \models \alpha$ und $M \rightsquigarrow \beta$.

$\rightsquigarrow$6 $M \rightsquigarrow \alpha \| \beta$, genau dann wenn $M \rightsquigarrow \alpha \vee \beta$.

Sprich: in Bezug auf Falschheit verhält sich Ambiguität so wie $\vee$!

Beispiele

Wir nennen die resultierende Logik *MAL*, aus Gründen die wir später sehen.

$M_1 = \{p, q, r\}$, $M_2 = \{p, q\}$

$\alpha_1 = (\neg(p \wedge q)) \rightarrow (q \| r)$
$\alpha_2 = \neg((p \wedge q) \rightarrow (q \| r))$

Frage

Gilt $M_1 \models \alpha_1$? Ja!
Gilt $M_2 \models \alpha_2$? Nein!

Logische Konsequenz

Wir haben nun definiert zwei Relationen zwischen Modellen und Formeln.

Was für uns interessanter ist, ist die Relation zwischen Formeln, die **Konsequenzrelation** der Logik.

NB: Wir suchen eine *einzige* Relation. Um diese semantische Relation zu unterscheiden von $\models, \rightsquigarrow$, denotieren wir sie mit $\Rightarrow_{MAL}$.

Definition von Konsequenz

1. $\alpha \models \beta$ gdw. $M \models \alpha$ impliziert $M \models \beta$
2. $\alpha \rightsquigarrow \beta$ gdw. $M \rightsquigarrow \alpha$ impliziert $M \rightsquigarrow \beta$
3. $\alpha \Rightarrow_{MAL} \beta$ gdw. $\alpha \models \beta$ und $\beta \rightsquigarrow \alpha$.

Logische Konsequenz: Lesekonvention

Definitionen von Konsequenz

1. $\alpha \models \beta$ wird gelesen als: α *verifiziert* β
2. $\alpha \rightsquigarrow \beta$ wird gelesen als: α *falsifiziert* β
3. $\alpha \Rightarrow_{MAL} \beta$ wird gelesen als: α *impliziert* β

Logische Konsequenz

Qua Kontraposition gilt: für α, β klassisch gilt:

$$\alpha \models \beta \text{ gdw. } \neg\beta \models \neg\alpha$$

Also $\alpha \models \beta$ gdw. $\beta \rightsquigarrow \alpha$ (denn $M \not\models \alpha$ gdw. $M \rightsquigarrow \alpha$)

Also $\alpha \models \beta$ gdw. $\alpha \Rightarrow_{MAL} \beta$ (für klassisches α, β!)

Das ist schonmal wichtig: unsere Logik ist eine **konservative Erweiterung** (und daher konsistent).

Wir verlieren aber die Äquivalenz, wenn wir Ambiguität betrachten!

Logische Konsequenz

Lemma

Es gibt α, β, so dass $\alpha \models \beta$, aber $\alpha \not\Rightarrow_{MAL} \beta$, also $\beta \not\rightsquigarrow \alpha$.

Setze $\alpha = p \| q, \qquad \beta = p \wedge q$

$M \models p \| q$ gdw. $M \models p \wedge q$ (nach Definition).

Aber: $\{p\} \rightsquigarrow p \wedge q$, hingegen $\{p\} \not\rightsquigarrow p \| q$!

Logische Konsequenz: Noch ein Beispiel

Lemma (dual)

Es gibt α, β, so dass $\beta \rightsquigarrow \alpha$, aber $\alpha \not\Rightarrow_{MAL} \beta$, also $\alpha \not\models \beta$.

Setze $\alpha = p \| q, \qquad \beta = p \vee q$

$M \rightsquigarrow p \| q$ gdw. $M \rightsquigarrow p \vee q$ (nach Definition).

Aber: $\{p\} \models p \vee q$, hingegen $\{p\} \not\models p \| q$!

Eigenschaften der Logik *MAL*

Lemma A

Es gilt $\alpha \wedge \beta \Rightarrow_{MAL} \alpha \| \beta \Rightarrow_{MAL} \alpha \vee \beta$

Das ist geradeaus. Ebenso geradeaus ist:

Lemma B

$\beta \| \alpha \Rightarrow_{MAL} \alpha \| \beta$

Also eine konsistente Logik mit kommutativer Ambiguität!

Lemma C

$\alpha \Rightarrow_{MAL} \alpha'$ und $\beta \Rightarrow_{MAL} \beta'$ implizieren $\alpha \| \beta \Rightarrow_{MAL} \alpha' \| \beta'$

Beweise?

Übung!

Eigenschaften der Logik *MAL*: Universelle Distribution

Wir nutzen $\Leftrightarrow_{MAL}$ als symmetrische Hülle von $\Rightarrow_{MAL}$, also:

$$\alpha \Leftrightarrow_{MAL} \beta \text{ gdw. } \alpha \Rightarrow_{MAL} \beta \text{ und } \beta \Rightarrow_{MAL} \alpha$$

Universelle Distribution

Wir haben folgende Äquivalenzen:

- $(\alpha \| \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow_{MAL} (\alpha \wedge \beta) \| (\alpha \wedge \gamma)$
- $(\alpha \| \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow_{MAL} (\alpha \vee \beta) \| (\alpha \vee \gamma)$
- $\neg(\alpha \| \beta) \Leftrightarrow_{MAL} \neg\alpha \| \neg\beta$

Eigenschaften der Logik *MAL*: Kongruenz

Wir nutzen $\Leftrightarrow_{MAL}$ als symmetrische Hülle von $\Rightarrow_{MAL}$.

Lemma: Kongruenzabschluss

Nimm an, wir haben $\alpha \Leftrightarrow_{MAL} \beta$. Wir nehmen an, $\gamma[-]$ ist ein **Kontext**, der eine (variable) Teilformel einschließt. Dann gilt:

$$\gamma[\alpha] \Leftrightarrow_{MAL} \gamma[\beta].$$

Das zu zeigen ist etwas Arbeit. Man kann das aber ganz nett zeigen indem man dieselbe Logik etwas anders beschreibt (sehen wir später!).

Eigenschaften der Logik: Substitution

Wir sagen $\sigma(Var) \to \texttt{WFF}$ ist eine Substitution. Die homomorphe Erweiterung $\overline{\sigma} : \texttt{WFF} \to \texttt{WFF}$ nennen wir eine uniforme Substitution.

Lemma

Unsere Logik ist nicht geschlossen unter Substitution, d.h.: $\alpha \Rightarrow_{MAL} \beta$ impliziert nicht $\overline{\sigma}(\alpha) \Rightarrow_{MAL} \overline{\sigma}(\beta)$

Nimm einfach eine beliebige Tautologie wie $p \vee \neg p$, substituiere ambig.

Eigenschaften der Logik: Substitution

$\Rightarrow_{MAL} \alpha$ bedeutet (nach Definition):

- α ist wahr in allen Modellen
- $\neg\alpha$ ist falsch in allen Modellen.

Das sind die **Tautologien** unserer Logik. Das folgende ist offensichtlich:

MAL Tautologien

Falls α eine klassische Tautologie ist, dann gilt $\Rightarrow_{MAL} \alpha$

(Konservative Erweiterung!)

Eigenschaften der Logik: Substitution

Also: $\Rightarrow_{MAL} p \vee \neg p$. Aber:

Substitution

$\not\Rightarrow_{MAL} (p \| q) \vee \neg(p \| q)$.

Beweis

Übung!

Eigenschaften der Logik *MAL*: Substitution

Das ist irritierend. Aber es ist notwendig, wenn wir nicht in dieselben Paradoxien laufen wollen wie in der Algebra, denn:

Logik und Algebra

Jede Logik, die kongruent und geschlossen unter Substitution ist, hat eine algebraische Semantik.

Und algebraische Semantik wäre in diesem Fall eine UDA – wenn es sie denn gäbe!

Eigenschaften der Logik *MAL*: Substitution

Das ist also ein positives Ergebnis – sonst wären wir wieder in die alten Paradoxien gelaufen!

Wir schauen uns jetzt noch ein paar andere Eigenschaften an.

Eigenschaften der Logik: Inferenzen

- Wir schreiben $M \models \Gamma$, falls gilt: $M \models \gamma$ f.a. $\gamma \in \Gamma$
- Wir schreiben $M \rightsquigarrow \Gamma$, falls gilt: es gibt ein $\gamma \in \Gamma$ so dass $M \rightsquigarrow \gamma$.
- Wir schreiben $\Gamma \Rightarrow_{MAL} \alpha$, falls gilt: $M \models \Gamma$ impliziert $M \models \alpha$, und $M \rightsquigarrow \alpha$ impliziert $M \rightsquigarrow \Gamma$
- Wir schreiben $\Rightarrow_{MAL} \alpha$ (α ist eine Tautologie), falls für jedes M gilt: $M \models \alpha$ und $M \not\rightsquigarrow \alpha$ (das ist natürlich redundant).

Eigenschaften der Logik: Inferenzregeln

Das Gesetz der Disambiguierung gilt in dieser Logik:

Disambiguierung

Falls α klassisch ist, dann gilt $\{\neg\alpha, \alpha \| \beta\} \Rightarrow_{MAL} \beta$

Beweis: Übung.

Man beachte den Fall wo α nicht klassisch ist! Gilt das? Übung!

Eigenschaften der Logik: Inferenzregeln

Wir können nun fragen: welche Inferenzregeln erfüllt unsere Logik?
Eine sehr bekannte ist **modus ponens**, normalerweise geschrieben

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$$

Für uns wird das: $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \Rightarrow_{MAL} \beta$

Eigenschaften der Logik: MP

Lemma

Modus ponens ist keine zulässige Inferenz in der Logik *MAL*.

Gegenbeispiel: $\alpha = p \| q$, $\beta = r$.

Wir haben: falls $M \models \{(p \| q) \to r, p \| q\}$, dann $M \models r$.

Aber: $\{p\} \rightsquigarrow r$, $\{p\} \not\rightsquigarrow \{(p \| q) \to r, p \| q\}$!

Sprich: $\{p\}$ ist ein Gegenbeispiel.

Die Bedeutung der Logik

Dementsprechend ist $\alpha \to \alpha$ auch keine Tautologie *im allgemeinen Fall*: setze $\alpha = p \| q$.

$$\{p\} \not\rightsquigarrow p \| q, \ \{p\} \not\models p \| q!$$

Diese Logik ist sehr misstrauisch – sie akzeptiert Inferenzen nicht als Schemata, sondern nur wenn diese voll ausbuchstabiert sind!

Die Bedeutung der Logik

MAL ist die *vorsichtige*, oder *misstrauische* Logik der Ambiguität.

- Wir sind vorsichtig welche Inferenzen ziehen, *über*vorsichtig könnte man sagen.
- Anders gesagt: wir sind sehr misstrauisch, dass ambige Terme in verschiedenen Bedeutungen benutzt werden. Daher akzeptieren wir keinen Modus Ponens!
- Um eine Inferenz zu akzeptieren, müssen wir alle Details sehen!

Die Bedeutung der Logik

Linguistisch gesehen ist das eher problematisch;

- Ein Argument ist erst dann akzeptabel, wenn wir es bis ins letzte Detail ausgemacht haben.
- Das scheint sinnvoll v.a. in einem *unkooperativen Kontext*, wo wir absolute Sicherheit suchen mit einem Partner, der uns übervorteilen will.
- $\|$-Kommutativität scheint ein fast notwendiges Merkmal zu sein: wenn wir absolute Sicherheit wollen, dann spielt auch die Reihenfolge der Lesarten (primär, sekundär etc.) keine Rolle mehr.

Die Bedeutung der Logik

Der große Vorteil von *MAL* ist:

- Die Erweiterung von *MAL* auf Prädikatenlogik ist geradeaus: Quantoren bekommen ihre ganz normale Semantik.
- Der Grund ist: *MAL* basiert letzten Endes komplett auf klassischen Begriffen!

Das ist noch deutlicher zu sehen in der folgenden Alternativen Formulierung.

Die Bedeutung der Logik

Es lässt sich übrigens auch zeigen:

Minimalität

MAL ist die **minimale** kommutative Logik der Ambiguität. D.h.: jede Logik, die kleiner ist, erfüllt nicht mehr die Kriterien für Ambiguität!

Alternative Formulierung

Es gibt eine alternative Formulierung der Logik. Anstelle von **Verifizierung** und Falsifizierung können wir setzen:

- $M \models_{\Box} \alpha$, falls M α notwendig wahr macht;
- $M \models_{\Diamond} \alpha$, falls M α möglicherweise wahr macht.

Klassisch fallen beide Begriffe zusammen. Seien nun α, β klassisch. Dann bekommen wir:

1. $M \models_{\Box} \alpha \| \beta$ gdw. $M \models \alpha \wedge \beta$
2. $M \models_{\Diamond} \alpha \| \beta$ gdw. $M \models \alpha \vee \beta$

D.h.: es gibt ambige Formeln, die müssen wahr sein in einem Modell, und solche die können wahr sein im Modell.

Alternative Formulierung

Das liefert uns folgende Äquivalenz:

Lemma

$M \models_{\Box} \alpha$ gdw. $M \models \alpha$ (nach EJ)
$M \models_{\Diamond} \alpha$ gdw. $M \not\rightsquigarrow \alpha$ (nach EJ)
$M \not\models \alpha$ (nach EJ) gdw. $M \not\models_{\Box} \alpha$
$M \rightsquigarrow \alpha$ gdw. (nach EJ) $M \not\models_{\Diamond} \alpha$

Beweis ist geradeaus.

Alternative Formulierung

Aber: anstelle mit diesen Relationen zu arbeiten, modifizieren wir die **Formeln**, mit $\blacksquare, \blacklozenge : \texttt{WFF} \to \texttt{WFF}$.

Definition

$$
\begin{aligned}
\blacksquare(p) &= p \\
\blacksquare(\alpha \wedge \beta) &= \blacksquare(\alpha) \wedge \blacksquare(\beta) \\
\blacksquare(\alpha \vee \beta) &= \blacksquare(\alpha) \vee \blacksquare(\beta) \\
\blacksquare(\alpha \to \beta) &= \blacklozenge(\alpha) \to \blacksquare(\beta) \\
\blacksquare(\neg\alpha) &= \neg\blacklozenge(\alpha) \\
\blacksquare(\alpha \| \beta) &= \blacksquare(\alpha) \wedge \blacksquare(\beta)
\end{aligned}
$$

c

Alternative Formulierung

Aber: anstelle mit diesen Relationen zu arbeiten, modifizieren wir die Formeln:

Definition

$$
\begin{aligned}
\blacklozenge(p) &= p \\
\blacklozenge(\alpha \wedge \beta) &= \blacklozenge(\alpha) \wedge \blacklozenge(\beta) \\
\blacklozenge(\alpha \vee \beta) &= \blacklozenge(\alpha) \vee \blacklozenge(\beta) \\
\blacklozenge(\alpha \rightarrow \beta) &= \blacksquare(\alpha) \rightarrow \blacklozenge(\beta) \\
\blacklozenge(\neg\alpha) &= \neg\blacksquare(\alpha) \\
\blacklozenge(\alpha \| \beta) &= \blacklozenge(\alpha) \vee \blacklozenge(\beta)
\end{aligned}
$$

Alternative Formulierung

Satz

In *MAL* gilt $\alpha \Rightarrow_{MAL} \beta$, genau dann wenn gilt (in klassischer Logik):
$\blacksquare\alpha \models \blacksquare\beta$ und $\blacklozenge\alpha \models \blacklozenge\beta$

Das können wir auch erweitern: $\blacksquare\Gamma$ und $\blacklozenge\Gamma$ sind einfach die Punktweisen Erweiterungen auf Mengen:

Satz

In *MAL* gilt $\Gamma \Rightarrow_{MAL} \alpha$, genau dann wenn gilt (in klassischer Logik):
$\blacksquare\Gamma \models \blacksquare\alpha$ und $\blacklozenge\Gamma \models \blacklozenge\alpha$

Beweis (Skizze)

Wir zeigen zunächst:

- $M \models \alpha$ (nach EJ) gdw. $M \models \blacksquare\alpha$ (nach W)
- $M \rightsquigarrow \alpha$ (nach EJ) gdw. $M \not\models \blacklozenge\alpha$ (nach W)

Beweis: Induktion über Formelkomplexität!

Beweis (Skizze)

Daraus folgt:

- $\alpha \models \beta$ (nach JvE) gdw. $\blacksquare\alpha \models \blacksquare\beta$ (nach W)
- $\alpha \rightsquigarrow \beta$ (nach JvE) gdw. $M \not\models \blacklozenge\alpha$ impliziert $M \not\models \blacklozenge\beta$ gdw. $M \models \blacklozenge\beta$ impliziert $M \models \blacklozenge\alpha$.

Es gilt also:

$$\alpha \Rightarrow_{MAL} \beta$$

gdw.

$$\alpha \models \beta \text{ und } \beta \rightsquigarrow \alpha$$

gdw.

$$\blacksquare\alpha \models \blacksquare\beta \text{ und } \blacklozenge\alpha \models \blacklozenge\beta$$

Beweis: Erweiterung auf Mengen

Zu zeigen dass das auch für $\Gamma \vdash \alpha$ gilt ist tatsächlich nur deshalb ohne weiteres möglich, weil die Eigenschaft der **Kompaktheit** gilt (für Aussagen *und Prädikatenlogik*!)

Definition Kompaktheit

Eine Logik L ist **kompakt**, falls gilt: $\Gamma \models \alpha$ impliziert: es gibt eine **endliche** Teilmenge $\Gamma' \subseteq \Gamma$, so dass $\Gamma \models \alpha$.

Theorem

Aussagenlogik und Prädikatenlogik (in beliebigem Vokabular) sind kompakt.

Das folgt aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz, nachdem semantische Implikation und formale Beweisbarkeit (mit endlichem Beweis) zusammenfallen

Beweis: Erweiterung auf Mengen

Korollar

MAL ist kompakt.

Beweis: Durch die obige Äquivalenz können wir Kompaktheit auf *MAL* ausweiten.

Nun folgt unser Theorem bereits: eine endliche Menge von Formeln Γ' ist immer äquivalent zu einer einzigen Formel $\bigwedge \Gamma'$!
QED

Alternative Formulierung

Ich finde das ganz hilfreich, denn es zeigt uns dass wir nur klassische Logik brauchen um *MAL* zu verstehen und zu entscheiden. Z.B. also:

$$\blacklozenge\{(p\|q) \to r, p\|q\} = \{(p \wedge q) \to r, p \vee q\}$$

Das impliziert offensichtlich nicht r!