Probeklausur zu Einführung in die computationelle Logik: Modelltheorie im WS 20/21

Christian Wurm
cwurm@phil.hhu.de

February 2, 2022

Hier drei Aufgaben zur Modelltheorie, wie sie in der Klausur stehen könnten (also eine davon)!

Wir befinden uns in der Theorie der geordneten Bäume, mit den Prädikaten $\sqsubset, \leq$; das eine Dominanz (vertikal), das andere Präzedenz (horizontal).

Aufgabe ?a

Nehmen Sie die Theorie der geordneten Bäume, sowie folgendes Axiom:

(1) $\exists x.\forall y.[x \sqsubset y \vee y \leq x]$

Wie sehen die Modelle aus? Zeichnen Sie ein endliches, ein unendliches.

Aufgabe ?a'

Alternativ (wurz denotiert hier den Wurzelknoten):

(2) $\exists x.\forall y.[(\neg x = y) \rightarrow (x \sqsubset y \vee y \sqsubset x \vee wurz(y))]$

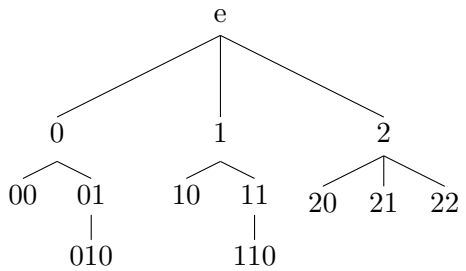
Aufgabe ?b

Nehmen Sie folgende Formel ($<$ wie üblich):

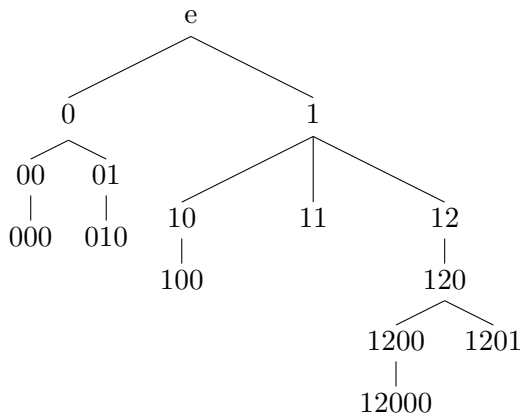
(3) $\forall xyzu.(x \sqsubset z \wedge z \sqsubset y \wedge u < z) \rightarrow (u \leq x \vee u \leq y)$

Entscheiden Sie für folgende Modelle, ob Sie das Axiom erfüllen! Falls nein, liefern Sie die Belegung, die die Formel falsifiziert!

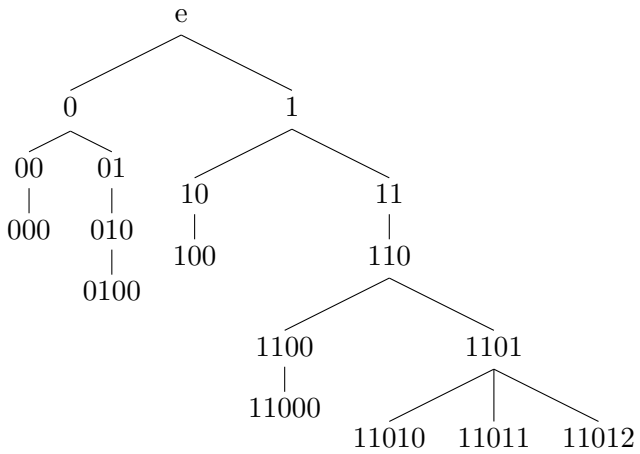
a)



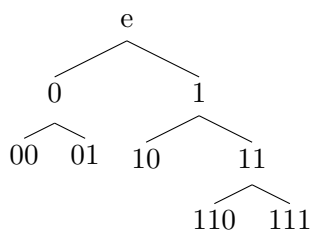
b)



c)



d)



Aufgabe ?b'

Dasselbe mit der Formel:

(4) $\forall xyzuv.[(x < y \wedge y < z \wedge z < u) \rightarrow \neg x \sqsubset v]$

Aufgabe ?c

Das Prädikat $\sqsubset$ ordnet die unmittelbaren Nachfolger jedes Knotens linear. Definieren Sie ein Prädikat $EG(x)$ (wie "erstgeboren"), welches denotiert nur jeweils den $\sqsubset$-ersten unmittelbaren Nachfolger eines beliebigen Knotens.

Aufgabe ?c'

Definieren Sie das Prädikat $Oma_2(x)$, das auf alle Knoten mit 2 Enkeln zutrifft.

Aufgabe ??a

Definieren Sie die Menge aller Zahlen n so dass $n \; mod \; 7 = 2$

Aufgabe ??b

Ein Primzahlzwilling ist ein Paar von Zahlen $(n, n+2)$ so dass beide n und $n+2$ Primzahlen sind (z.B. $(3,5), (5,7), (11,13)$ etc. Definieren Sie die Menge aller Primzahlzwillinge.

Aufgabe ??c

Definieren Sie die Menge aller Zahlen, die zwei nicht-triviale Teiler haben welche selber *keine* Primzahlen sind.