Logik und Zeit

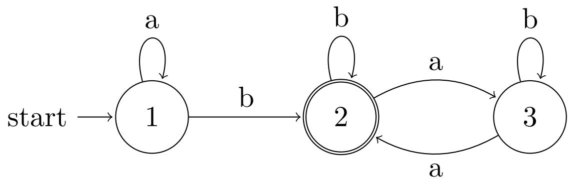
Probeklausur, Sommersemester 2019

15.7.2015

Total: 14 Punkte
Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Zulässige Hilfsmittel: Skript, Notizen

1 1+3 Punkte

Nehmen Sie folgenden endlichen Büchi-Automaten $\mathfrak{A}$:



1. Entscheiden Sie, ob $\mathfrak{A}$ folgendes ω-Wort akzeptiert, und begründen Sie: $(ab)^\omega$

2. Setzen Sie $a := \{p\}$, $b := \{q\}$. Nehmen Sie an, dass ein Wort $w \in \{a, b\}^\omega$ einem Modell LTL-Modell $\mathcal{M}$ entspricht im üblichen Sinne, und w wird von $\mathfrak{A}$ akzeptiert. Ist dann $\mathcal{M}$ notwendig ein Modell von $\Box\Diamond p$? Begründen Sie!

Lösung 1. Ja, denn durch die Alternation von a und b kommen wir immer wieder von Zustand 2 in Zustand 3 und umgekehrt, berühren den akzeptierenden Zustand 2 unendlich oft.

2. Nein, denn $\Box\Diamond p$ bedeutet dass p (entspricht a) unendlich oft vorkommt. w könnte aber die Form haben b^ω; der Automat akzeptiert das Wort, aber p wäre niemals wahr im Modell.

2 1+1+1+1 Punkte

Nehmen Sie die Logik LTL mit der Semantik wie im Skript. Entscheiden Sie ob folgende Aussagen wahr sind:

1. $\Diamond\Box\Diamond p \models \Diamond p$
2. $\Diamond p \models \Diamond\Box\Diamond p$
3. $\Diamond(pUq) \models \Diamond q$
4. $\Diamond q \models \Diamond(pUq)$
5. $\Diamond(pRq) \models \Diamond q$ stimmt!
6. $\Diamond(pRq) \models \Diamond p$ stimmt nicht! (Gegenbsp.: irgendwann gilt immer und nur q)

Lösung

1. Gilt, denn falls $\Diamond\Box\Diamond p$ erfüllt wird, dann gibt es einen Punkt, ab dem $\Box\Diamond p$ erfüllt wird, was bedeutet dass unendlich oft p gilt. Also gilt an einem Punkt in der Zukunft p, also $\diamond p$.
2. Gilt nicht: nimm ein unendliches Modell, in dem an Punkt 2 p gilt, dann nie mehr. Das erfüllt $\Diamond p$, aber es gibt keinen Punkt in der Zukunft der $\Box\Diamond p$ erfüllt.
3. Gilt; wir zeigen dass mit Kontraposition: nimm an, ein Modell erfüllt nicht $\Diamond p$. Dann gibt es keinen Punkt, an dem p gilt; also auch keinen Punkt an dem pUq gilt, denn das setzt voraus dass irgendwann q gilt.
4. Gilt nicht, denn pUq präsupponiert dass p gilt. Also: falls $M, n \not\models p$ f.a. $n \in \mathbb{N}$, ist $\Diamond(pUq)$ falsch.

3 2+2 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende CTL-Formeln ein unendliches Modell haben, und skizzieren Sie ein solches (unendliches) Modell.

1. $(A\Diamond(ANp)) \wedge (E\Box(\neg p))$
2. $(A\Box p) \wedge (E\Diamond\neg p)$

Lösung

1. Hat kein Modell; denn nimm an, unser Modell $\mathcal{M}$ erfüllt $E\Box(\neg p)$. Dann gibt es einen unendlichen Pfad P, der an der Wurzel beginnt, auf dem nirgends p gilt. Dann kann das Modell nicht $A\Diamond(ANp)$, denn das verlangt dass es auf jedem Pfad einen Punkt gibt, der ANp erfüllt; also muss auch ein Punkt $t \in P$ die Formel ANp erfüllen. Das ist aber ein unmöglich, denn der Pfad ist unendlich, es gibt also qua Annahme einen unmittelbaren Nachfolger $t' \in P$, und der erfüllt $\neg p$.

2. Hat ebenso kein Modell, denn $(A\Box p)$ verlangt, dass überall p gilt; $(E\Diamond\neg p)$ verlangt, dass irgenwo im Baum $\neg p$ gilt – das ist unvereinbar.

4 3 Punkte

Wir definieren uns folgende Relation "startet früher": $\mathsf{sf} := \mathsf{e}^{-1} \cup \mathsf{w}^{-1} \cup \mathsf{u} \cup \mathsf{t} \cup \mathsf{p}$, die besagt dass das zweite Argument später anfangt als das erste. Schreiben Sie eine HS Formel ϕ, so das gilt: $(\mathbb{R}, val), \langle x, y\rangle \models \phi$, gdw. es ein $\langle z, z'\rangle$ gibt, so dass 1. $\langle\langle x, y\rangle, \langle z, z'\rangle\rangle \in \mathsf{sf}$, und 2. $(\mathbb{R}, val), \langle z, z'\rangle \models p$.

Lösung Wenn es eine Modalität $\langle \mathsf{sf}\rangle$ gäbe, dann wäre die Lösung $\langle \mathsf{sf}\rangle p$. Da es das nicht gibt, brauchen wir eine Disjunktion, die die Definition von sf wiedergibt:

$$\phi := \langle \mathsf{e}^{-1}\rangle p \vee \langle \mathsf{w}^{-1}\rangle p \vee \langle \mathsf{u}\rangle p \vee \langle \mathsf{t}\rangle p \vee \langle \mathsf{p}\rangle p$$

Es lässt sich leicht prüfen, dass das die gewünschte Bedeutung hat.

Ein elegantere Lösung ist folgende: startet später heißt: jedes Intervall, welches auf das Referenzintervall trifft, präzediert besagtes Intervall. Also:

$$[\mathsf{t}^{-1}]\langle \mathsf{p}\rangle p$$

5 3 Punkte

Schreiben Sie eine äquivalente Formel in CDT.

Lösung Hier nehmen wir die Lösung parallel zur zweiten Lösung der vorigen Aufgabe. Zunächst definieren wir uns die Relation p:

$$(\neg\pi C p) T \neg\pi$$

Zur Erinnerung: das linke Argument von T ist dasjenige, was rechts an die Referenz angrenzt. Dieses Intervall müssen wir nur noch choppen

Wir müssen also sicher stellen das ein links angrenzendes Intervall das Intervall mit p präzediert; das linke Angrenzen wird ausgedrückt mit D; also bekommen wir:

$$((\neg\pi C p) T \neg\pi) D \neg\pi$$