Logik und Zeit

Klausur Wintersemester 2015/16

10.2.2016

Total: 14 Punkte
Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Zulässige Hilfsmittel: Skript, Notizen

1 1+2 Punkte

Wir nehmen die übliche Syntax und Semantik der Prädikatenlogik als gegeben, und das binäre Prädikat $<$, das eine irreflexive, transitive Relation denotiert (wir nehmen die entsprechenden Axiom $\forall x.\neg(x < x)$ etc. als gegeben). Wir nehmen an, dass $<$ den Verlauf der Zeit denotiert. Wohlgemerkt: wir haben keine weiteren Annahmen, insbesondere keine Linearität. Liefern Sie die Formeln, die folgenden Aussagen entsprechen:

1. Für jeden Zeitpunkt gibt es mindestens 2 $<$-Nachfolgepunkte, die nicht durch $<$ vergleichbar sind; d.h. an jedem Zeitpunkt verzweigt sich die Zeit in der Zukunft.
2. Für jeden Zeitpunkt gilt: die Menge seiner $<$-Vorgänger ist linear geordnet.

Sie können in den Formeln auch das Symbol $=$ für Gleichheit benutzen; aber achten Sie bitte auf die Irreflexivität!

2 1+1+1+1 Punkte

Nehmen Sie die Logik LTL mit der Semantik wie im Skript. Entscheiden Sie ob folgende Aussagen wahr sind ($\models$ bezieht sich auf alle unendlichen Modelle); begründen Sie!

1. $\Box(\Diamond p \vee \Diamond q) \models \Diamond p$

   Nimm ein Modell das erfüllt $\Box(\Diamond q)$, p ist an allen Punkten falsch. Dann gilt an allen Punkten $\Diamond p \vee \Diamond q$, aber nirgends p.

   Oder einfacher: $M, n \models q$, $M, n \not\models p$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

2. $\Box((\Diamond p \vee \Diamond q) \wedge \neg q) \models \Diamond p$

   $\Box((\Diamond p \vee \Diamond q) \wedge \neg q)$ ist äquivalent zu $\Box(\Diamond p \vee \Diamond q) \wedge (\Box\neg q)$. Also falls $M \models \Box((\Diamond p \vee \Diamond q) \wedge \neg q)$, dann $M \models \Box\neg q$. Also muss gelten: um $\Box((\Diamond p \vee \Diamond q)$ zu erfüllen, müssen wir $\Box\Diamond p$ erfüllen. Also gilt ∞-oft p, also gilt $\Diamond p$.

3. $\Diamond q \models \Diamond(pRq)$

   Nimm einfach ein Modell M so dass $M, 5 \models q$, $M, n \not\models p$ f.a. $n \in \mathbb{N}$, $M, n \not\models q$ f.a. $n \in \mathbb{N} - \{5\}$

4. $\Box Np \models N\Box p$

   Nimm an, $M \models \Box Np$. Also gilt: falls $n \geq 1$, $M, n \models Np$ gdw. $M, n+1 \models p$. Sprich: falls $n \geq 2$, dann $M, n \models p$.

   Dann gilt also: $M, 1 \models \Box p$. Also: $M, 0 \models N\Box p$.

3 2+2 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende CTL-Formeln ein unendliches Modell haben, und skizzieren Sie ein solches (unendliches) Modell.

1. $(E\Box(ANp)) \wedge (A\Box(E\Diamond\neg p))$ Gibt es: immer rechts abbiegen: p. Zweimal links abbiegen: $\neg p$.

2. $(A\Diamond p) \wedge (A\Box(\neg ANp))$ Gibt es: nimm den Baum, in dem p gilt an allen und unmittelbaren Nachfolgern der Wurzel; sonst nirgends. (Vorsicht: Modalitäten sind ja irreflexiv, deswegen spielt die Einbettungstiefe eine zentrale Rolle!

4 3 Punkte

Nehmen Sie an, wir haben die Logik HS mit einer zusätzlichen, besonderen Proposition $\mathsf{2}$ gegeben, für die gilt:

$$(\mathbb{R}, val), \langle x, y \rangle \models \mathsf{2} \text{ gdw. } y = x + 2.$$

(NB: $\mathsf{2}$ ist eine Proposition, keine Modalität!) Nehmen wir an, die reellen Zahlen des Modells repräsentieren die Zeiteinheit der Sekunden. Schreiben Sie eine Formel ϕ so dass gilt:
$(\mathbb{R}, val) \models \phi$ gdw. auf das Ende jedes Intervalles, in dem die Proposition p gilt, mit einem Abstand von 2 Sekunden ein Intervall folgt, in dem q gilt.

Lösung: $2 \to ((\langle t^{-1}\rangle p) \to \langle t\rangle q)$

(NB: es gibt hier viele Lösungen, hängt auch davon ab, welches Intervall wir als Referenz wählen).

5 3 Punkte

Schreiben Sie eine äquivalente CDT-Formel.

Lösung : Parallel zu HS: $2 \to ((pD\neg\pi) \to (qT\neg\pi))$.

Es gibt aber viele andere Lösungen die ebenso gut sind, und dabei andere Referenzintervalle nutzen.