Algebren der Ambiguität

Christian Wurm (Düsseldorf)

Düsseldorf, 17.7.2014

Ambige Algebren

Unser erstes Modell um mit Ambiguität zu räsonnieren sind ambige Algebren.

Ambige Algebren

Eine AMBIGE ALGEBRA ist eine Algebra $\mathsf{A} = (A, \wedge, \vee, \sim, \|, 0, 1)$, wobei $(A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra ist, $\|$ eine binäre Operation, die folgende Axiome erfüllt:

$$\sim (a \| b) = \sim a \| \sim b \tag{$\|1$}$$

$$a \wedge (b \| c) = (a \wedge b) \| (a \wedge c) \tag{$\|2$}$$

Mindestens eines der beiden: $a \leq a \| b$ oder $b \leq a \| b$ gilt ($\|3$)

Ambige Algebren: ein besonderes Axiom

Mindestens eines der beiden: $a \leq a \| b$ oder $b \leq a \| b$ gilt (‖3)

(‖3) ist eine **Disjunction**!

- Das bedeutet insbesondere es gibt keine *freie ambige Algebra*, ein zentraler Begriff der universellen Algebra.
- Anders gesagt: in *jeder* ambigen Algebra gelten Gleichungen, die nicht in jeder ambigen Algebra gelten. (Das modelliert einen epistemischen Aspekt)
- Das führt uns später zu UDA –

AA: Ein Beispiel

Nimm die offensichtliche Boolesche Algebra über $\{0, a, b, 1\}$. Wir setzen

$$\begin{array}{llll} a\|b = a; & b\|a = b; & 0\|a = 0; & 1\|a = 1; \\ a\|1 = a; & b\|1 = b; & 0\|b = 0; & 1\|b = 1; \\ a\|0 = a; & b\|0 = b; & 0\|1 = 0; & 1\|0 = 1; \end{array}$$

$\wedge$-distribution gilt:

$$a = a\|b = (a\|b) \wedge a = a\|0 = a$$

$$0 = 0\|1 = (0\|1) \wedge a = 0\|a = 0$$

dasselbe für $\vee, \sim$

Das ist also eine echte 4-elementige Algebra.

Strukturtheorie I: Uniformität

Keine Kommutativität für $\|$:

$$\begin{aligned} \text{Nimm an} \quad & a\| \sim a = a \\ \text{dann} \quad & \sim a\|a = a \\ \text{aber auch} \quad & \sim (\sim a\|a) = \sim\sim a\| \sim a = a\| \sim a = a \\ \text{deswege} \quad & \sim a = a \quad \text{(which only holds in 1-element algebras)} \end{aligned}$$

Korollar 2

Falls A eine AA ist, und für alle $a, b \in A$ gilt dass $a\|b = b\|a$, dann hat A höchstens ein Element.

Lemma

Für alle ambigen Algebren A, $a, b \in A$ gilt

1. $a\|a = a$
2. $a \wedge b \leq a\|b \leq a \vee b$

Strukturtheorie I: Uniformität

Lemma (Montonizität von $\|$)

Nimm an $a' \leq a$ und $b' \leq b$. Dann $a' \| b' \leq a \| b$.

Lemma 7 (Uniformität)

Sei A eine ambige Algebra, $a, b \in A$, so dass $a \neq b$.

1. Falls $a \| b = a$, dann gilt für alle $c, c' \in A$: $c \| c' = c$;
2. Falls $a \| b = b$, dann gilt für alle $c, c' \in A$: $c \| c' = c'$.

Korollar

Für A eine ambige Algebra gilt folgendes: für alle $a, b \in A$, haben wir $a \| b = a$, oder für alle $a, b \in A$ haben wir $a \| b = b$.

Sprich: Ambige Algebren sind entweder RECHTSSEITIG oder LINKSSEITIG.

Bedeutung der Uniformität

Was bedeutet Uniformität? Das die Funktion $\|$ auf Basis *eines* Wertes global festgelegt ist!

Lemma 7 (Uniformität, informell)

Ambige Algebren sind **entweder** linksseitig **oder** rechtsseitig.

Also:	$a\|b = a$ **oder** $a\|b = b$ für alle a, b
Beispiel:	`Bank` bedeutet 'Sitzgelegenheit', **deswegen** bedeutet `Maus` means 'Computerwerkzeug'.

Bedeutung der Uniformität

Das ist sehr unintuitiv, und scheint die Konsequenz zweier Dinge zu sein:

1. die starken Axiome von Booleschen Algebren (doppelte Negation!)
2. die seltsamen Axiome zu $\|$
3. Vermutung: auch die Tatsache dass $\|$ total ist scheint problematisch? Wir brauchen Objekte wie $a\| \sim a$ im Beweis.

Partielle Algebren?

Sei $\|$ ein partieller Operator.

- Das ist konzeptuell sehr plausibel: Ambiguität ist nicht produktiv!
- Formal bringt das aber nicht sonderlich viel (später mehr dazu).

Universelle Distributionsalgebren

UDA sind schwächer als AA:

Universelle Distributionsalgebren

Eine UDA ist eine Algebra $\mathsf{A} = (A, \wedge, \vee, \sim, \|, 0, 1)$, wobei $(A, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra ist, $\|$ eine binäre Operation, die folgende Axiome erfüllt:

$$\sim (a\|b) = \sim a\| \sim b \qquad (\|1)$$

$$a \wedge (b\|c) = (a \wedge b)\|(a \wedge c) \qquad (\|2)$$

$$(a\|b)\|c = a\|(b\|c) \qquad (\|\mathrm{ass})$$

$$a\|b \leq (a \vee c)\|(b \vee d) \qquad (\|4)$$

$$a \wedge b \leq a\|b \leq a \vee b \qquad (\|5)$$

Universelle Distributionsalgebren

$$\sim (a \| b) = \sim a \| \sim b \qquad (\|1)$$

$$a \wedge (b \| c) = (a \wedge b) \| (a \wedge c) \qquad (\|2)$$

$$a \| b \leq (a \vee c) \| (b \vee d) \qquad (\|4)$$

$$a \wedge b \leq a \| b \leq a \vee b \qquad (\|5)$$

Das problematische Axiom 3 zerfällt in zwei Teile:

- 4 regelt die Ordnung zwischen ambigen Objekten (Monotonizität)
- 5 regelt die Ordnung zwischen ambigen und unambigen Objekten.
- Distribution bleibt gleich!

Universelle Distributionsalgebren

Lemma
Die Klasse UDA ist eine algebraische Varietät (geschlossen unter HSP!).

Eine Varietät wird axiomatisiert von einer Menge von Gleichungen (algebraische Theorie).

Lemma
Jede ambige Algebra ist eine universelle Distributionsalgebra.

Universelle Distributionsalgebren

Lemma
Die Klasse UDA ist eine algebraische Varietät (geschlossen unter HSP!).

Eine Varietät wird axiomatisiert von einer Menge von Gleichungen (algebraische Theorie).

Lemma
Jede ambige Algebra ist eine universelle Distributionsalgebra.

Universelle Distributionsalgebren

Randlemma

Sei $\mathbf{U}$ eine UDA, $a, b, c \in U$. Dann gilt: $a \| b \| c = a \| c$.

Sprich: jede Ambiguität jenseits der zwei ist bedeutungslos in dieser Klasse!

Repräsentationstheorem für UDA

Jede universelle Distributionsalgebra ist isomorph zu einer Algebra $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, wobei gilt:

- $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ Boolesche Algebren sind,
- $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ ist das direkte Produkt der beiden,
- $(a, b) \| (c, d) = (a, d)$ für alle $a, c \in B_1$, $b, d \in B_2$

Universelle Distributionsalgebren

Korollar

Sei **U** eine UDA, $a, b \in U$. Falls $a \| b = b \| a$, dann gilt $b = a$.

Korollar

Nimm an, **U** ist eine kommutative UDA. Dann ist $|U| = 1$, sprich: die Algebra ist trivial.

Ist ja ein Ding! Noch eine interessante Beobachtung:

Freie ambige Algebra

Jede freie ambige Algebra ist eine universelle Distributionsalgebra.

Was bedeutet das?

UDA sind kein passendes Modell für Räsonieren mit Ambiguität. Aber:

- Schwächere Axiome sind nicht zu halten.
- Partialität hilft nicht weiter.

Einziger Ausweg: **Algebra selbst** ist das Problem! Insbesondere zwei Eigenschaften:

1. Kongruenz (Transitivität als Spezialfall)
2. Abschluss unter Substitution

Was bedeutet das?

Kongruenz

Kongruenz bedeutet: wir können äquivalente Terme in allen Kontexten ersetzen – das Ergebnis bleibt gleich.

Substitution

Substitution bedeutet: wir können wahre Atome in wahren (Un)Gleichungen beliebig, aber uniform substituieren, das Ergebnis ist eine wahre (Un)Gleichung

Das bedeutet: Räsonnieren mit Ambiguität ist entweder inkongruent oder insubstituibel (nicht abgeschlossen unter Substitution).